

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

19. Band, Heft 8

22. März 1939

S. 337—384

Analysis.

Allgemeines:

● **Tricomi, Francesco:** *Lezioni di analisi matematica. Pt. 1., 4. ediz.* Padova: A. Milani 1939. VIII, 328 pag. e 72 fig. rilegato L. 80.—

Das Buch enthält eine aus Vorlesungen hervorgegangene, didaktisch vorzügliche Einführung in die höhere Analysis. Inhalt: Determinanten und lineare Gleichungen. Reelle Zahlen. Grenzwert- und Funktionsbegriff. Differentialquotienten und Anwendungen. Unbestimmte Integrale und Differentialgleichungen. Reihenlehre. Algebraische Gleichungen. Lineare Transformationen und quadratische Formen. — Beachtenswert einfach und ansprechend ist die auf dem Rechnen mit Dezimalbrüchen allein begründete Einführung der irrationalen Zahlen und ihrer Rechnungsarten und die ebenso fundierte Untersuchung der Häufungspunkte einer Folge. Der frühe Beweis des Cesaroschen Satzes, daß aus der Existenz von $\lim (a_{n+1} - a_n)$ seine Gleichheit mit $\lim \frac{a_n}{n}$ folgt, vereinfacht die Darstellung der Konvergenzkriterien erheblich. Der Begründung des Differentialquotienten folgt die Definition der Ordnung des Wachstums bzw. Verschwindens einer Funktion und die darauf gegründete Definition des Differentials mit praktischen Anwendungsbeispielen. Von der Integralrechnung wird nur das Einfachste gebracht (der Existenzsatz folgt im zweiten Bande), dagegen ein Abriß über die einfachsten Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung mit Anwendungen gegeben. Die Behandlung der Konvergenzkriterien von Reihen gewinnt an Eleganz durch die Zurückführung auf den Beweis des Kummerschen Kriteriums. Den Abschluß bildet die Behandlung der linearen Transformationen in n Unbestimmten, der quadratischen Formen, ihres Trägheitssatzes und der Bestimmung ihrer Signatur.

Harald Geppert (Gießen).

Szücs, Adolphe, et Louis de Grosschmid: *Remarque sur la série exponentielle.* Mat. fiz. Lap. 45, 167—170 (1938) [Ungarisch].

Si l'on définit la fonction exponentielle par sa série, il n'est pas sans intérêt de démontrer directement (sans faire intervenir le reste de la formule de Taylor) que, pour $x > 0$, la valeur de e^{-x} est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives de la série. C'est ce qui peut être basé sur l'identité

$$1 - \frac{x}{a+1} + \frac{x^2}{(a+1)(a+2)} - \dots \equiv e^{-x} \left[1 + \frac{a}{a+1}x + \frac{a}{a+2} \frac{x^2}{2!} + \dots \right]$$

dont les auteurs donnent quatre démonstrations.

Auszug.

Müller, Max: *Die Annäherung des Integrales zusammengesetzter Funktionen mittels verallgemeinerter Riemannscher Summen und Anwendungen.* S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1937, 1—72 (Abh. 6).

Many applications of Calculus lead to summations of the general character of those considered in the definition of the Riemann integral, without having exactly the form assumed in that definition. The proof of the formula for the length of a curve is a case in point. The author develops a simple lemma covering a great variety of applications which are discussed in the paper. The purpose of the paper is to furnish a unified treatment of various topics (formulas for length, area, volume, reduction of multiple integrals), which are usually considered in standard texts of Calculus. Accordingly, the Riemann integral is used throughout, and no attempt is made to establish results of a final character.

Tibor Rado (Columbus).

Jonesco, D. V.: Un problème relatif à la seconde formule de la moyenne. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 603—606 (1938).

Die Frage, für welche Funktionen f und φ im zweiten Mittelwertsatz

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + \varphi(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

stets $\xi = \frac{a+b}{2}$ ist, wird auf eine Funktionalgleichung zurückgeführt, die D. Pompeiu 1930 und Th. Anghelutza 1932 (s. dies. Zbl. 4, 7) behandelt haben, und danach Lösungen angegeben. *L. Schrutka (Wien).*

Watson, G. N.: On Brun's modification of Simpson's rule. Norsk. Vid. Selsk., Skr. Nr 4, 1—14 (1938).

Es wird eine Summenformel mit Restglied (also mit der Möglichkeit für eine Fehlerabschätzung) hergeleitet, bei der für $(2N+2)$ -mal stetig differentiierbare Funktionen $f(x)$ die Differenz

$$f(m+1) + f(m+2) + \dots + f(n) - \frac{1}{2} \int_m^n f(x)dx - \frac{n+1}{m+1} \int_m^n f(x)dx$$

dargestellt wird durch eine Summe über die mit gewissen Faktoren (Bernoullischen Zahlen) multiplizierten Werte der Ableitungen von f an den 4 Stellen $m, m+1, n, n+1$, und eine Restgliedsumme, die die $(2N+2)$ -ten Ableitungen von f an $(n-m)$ Zwischenstellen enthält. Zum Beweise erwies sich eine genauere Untersuchung von vom Verf. eingeführten Polynomen $\psi_r(x)$ als notwendig, die in Zusammenhang mit den Bernoullischen Polynomen stehen. *Collatz (Karlsruhe).*

Golab, Stanislaw: Sur une certaine condition nécessaire pour qu'une intégrale impropre soit finie. Wiadom. mat. 46, 1—5 u. franz. Zusammenfassung 6 (1939) [Polnisch].

Ist $f(x)$ für $0 \leq x \leq 1$ wachsend, $f(0) = 0$ und hat $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)}$ einen endlichen Wert, so ist $0 < \frac{x}{f(x)} < \int_0^x \frac{du}{f(u)}$, also $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{f(x)} = 0$; die Voraussetzung der Monotonie für $f(x)$

darf nicht unterdrückt werden.

Jarník (Praha).

Macphail, M. S.: Some iterated integrals in the fractional calculus. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 707—715 (1938).

Denoting $\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_T^t (t-v)^{\alpha-1} f(v)dv$ by ${}_T I_t^\alpha f(t)$ and assuming $T \geq 0, \alpha > 0, k > 0$, then $\int_T^\infty \frac{{}_T I_t^\alpha f(t)}{t^{k+\alpha}} dt = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} \int_T^\infty \frac{f(t)}{t^k} dt$, provided that the right-hand side exists as

Lebesgue-integral, or that $f(t)$ is continuous and the right-hand side is (not necessarily absolutely) convergent. Similar formulas are proved in which the left-hand side contains e^{-kt} , $\cos kt$ or $\sin kt$ (and no more $t^{-(k+\alpha)}$). From this it follows that if the integral $\int_T^\infty g(v)f(v)dv$ converges, then $g(\mu) \int_T^\mu f(v)dv \rightarrow 0$ as $\mu \rightarrow \infty$, the function $g(v)$

being any function that tends monotonically to zero as $v \rightarrow \infty$. Further applications to the evaluation of well known integrals involving Bessel functions. *J. Ridder.*

Love, E. R.: Fractional integration, and almost periodic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 44, 363—397 (1938).

f is L if f is a complex function of a real variable which is Lebesgue-integrable on every finite interval. $\bar{\alpha}$ is the real part of the complex number α ; $f_\alpha(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x-u)u^{\alpha-1}du = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(x-u)u^{\alpha-1}du$. Prop.: 1. If $f \in L$ has a bounded indefinite integral and

$0 < \bar{\alpha} < 1$, then $f_{\alpha}(x)$ exists for almost all x , and f_{α} is L and has mean value zero. 2. Adding the conditions $\bar{\beta} > 0$, $\bar{\alpha} + \bar{\beta} < 1$, $(f_{\alpha})_{\beta}(x)$ exists and is equal to $f_{\alpha+\beta}(x)$ for almost all x . 3. If further for certain α (with $0 < \bar{\alpha} < 1$) there is a ξ such that $(f_{\alpha})_{1-\alpha}(\xi)$ exists, then $(f_{\alpha})_{1-\alpha}(x)$ exists for this α and all x , and $(f_{\alpha})_{1-\alpha}(x) - (f_{\alpha})_{1-\alpha}(\xi) = \int_{\xi}^x f(t) dt$. Considering functions which satisfy the preceding conditions and are also almost periodic in Stepanoff's sense (Sap), $f_{\alpha}(x)$ will also be Sap and under 3. the condition about ξ may be omitted. These and other propositions are illustrated by examples; they may be considered as extensions of similar propositions about continuous periodic functions of mean value zero, given by Weyl. *J. Ridder.*

Reihen:

Petrovitch, Michel: Sur les séries entières doubles. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 4, 139—147 (1938).

Verf. betrachtet im wesentlichen Doppelreihen $\sum_{m,n} A_{mn} x^m y^n$, für die $A_{mn} = Q_{mn} A_m B_n$ oder $= Q_{mn} (A_m + B_n)$ ist, wo (A_m) und (B_n) zwei einfache Zahlenfolgen sind, während Q_{mn} ein Polynom in endlich vielen Größen $m, \lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, n, \mu_1^n, \mu_2^n, \dots$ (λ_k, μ_l und die Koeffizienten des Polynoms von m, n unabhängig) bedeutet. Eine Doppelreihe dieser Art stellt eine Funktion dar, die sich als Summe endlich vieler Produkte $X(x)Y(y)$ einer Funktion von x mit einer Funktion von y aufbauen läßt; für Spezialfälle werden die Funktionen $X(x), Y(y)$ genauer beschrieben. *F. Lösch.*

Jordan, John Q., and Walter Leighton jr.: On the permutation of the convergents of a continued fraction and related convergence criteria. Ann. of Math., II. s. 39, 872—882 (1938).

New criteria of convergence are here derived for the continued fraction

$$1 + \frac{x_1}{|1|} + \frac{x_2}{|1|} + \dots + \frac{x_n}{|1|} + \dots \quad (1)$$

$(x_n \neq 0, \text{ complex}),$

by applying to its convergents $\left\{ \frac{X_n}{Y_n} \right\}$ a transformation $\begin{cases} A_n = \alpha_n X_n + \beta_n X_{n+1} \\ B_n = \alpha_n Y_n + \beta_n Y_{n+1} \end{cases} (n=0, 1, \dots)$, with properly chosen (complex) coefficients α_n, β_n (cf. this Zbl. 14, 208). Here these are so chosen as to permute sets of three or four consecutive convergents of (1). — The following is a typical result: (1) converges, if

$$|x_{2n+1}| \leq \frac{1}{5}, \quad |x_{4n-2}| \geq 4, \quad |x_{4n}| \leq \frac{1}{5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

J. Shohat (Philadelphia).

Cooke, Richard G., and Paul Dienes: On the effective range of generalized limit processes. Proc. London Math. Soc., II. s. 45, 45—63 (1938).

Die Verff. beschäftigen sich mit Limitierungsverfahren für Zahlenfolgen, bei denen eine Folge (s_n) mittels einer Matrix $A = \|a_{nk}\|$ ($n, k = 1, 2, \dots$) in eine neue Folge $s'_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} s_k$ transformiert wird. Die Folge (s_n) heißt (A) -limitierbar zum Wert s , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = s$ ist; die Gesamtheit der (A) -limitierbaren Folgen (s_n) bildet das Wirkungsfeld des (A) -Verfahrens. — Zunächst werden für die Matrix A hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen das Wirkungsfeld des (A) -Verfahrens a) keine divergente Folge, b) keine beschränkte divergente Folge, c) keine unbeschränkte Folge, d) keine Potenzreihe für einen Punkt außerhalb des Konvergenzkreises enthält. In diesen Bedingungen spielt die Existenz einer zu A reziproken Matrix und deren Eigenschaften eine wesentliche Rolle. — Im Zusammenhang mit den Untersuchungen zu d) bemerken die Verff., daß es vorkommen kann, daß eine (sogar Töplitzsche) Matrix A eine Potenzreihe in einem oder mehreren isolierten Punkten außerhalb des Konvergenzkreises zum (im Sinne der analytischen Fortsetzung) richtigen Wert summiert, während

die Reihe in allen übrigen Punkten außerhalb des Konvergenzkreises nicht (A)-summierbar ist. — Endlich werden noch einige Eigenschaften reziproker Matrizen bewiesen.

F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Jeśmanowicz, L.: Sur l'unicité des séries de Schlömilch. C. R. Soc. Sci. Varsovie **31**, 43—59 (1938).

On appelle série de Schlömilch toute série de la forme

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m J_{\nu}(mx) + b_m H_{\nu}(mx)}{(\frac{1}{2} mx)^{\nu}} \quad (1)$$

où $|\nu| < 1/2$ et les fonctions $J_{\nu}(x)$ et $H_{\nu}(x)$ sont définies par la formule

$$x^{\nu} \int_0^{\pi/2} e^{ix \sin \varphi} \cos^{2\nu} \varphi d\varphi = 2^{\nu-1} \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2} + \nu) \{J_{\nu}(x) + iH_{\nu}(x)\}.$$

L'auteur démontre que tout ensemble $E \subset (-\pi, \pi)$ étant l'ensemble de l'unicité pour les séries trigonométriques aux coefficients convergent vers zéro est aussi l'ensemble de l'unicité pour les séries de Schlömilch dont les coefficients vérifient les deux

conditions suivantes: $a_m - ib_m = o(m^{\nu+1/2})$ et la série $\sum_{m=1}^{\infty} b_m/m$ converge.

Marcinkiewicz (Paris).

Fejér, Leopold: Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe. Proc. Cambridge Philos. Soc. **34**, 503—509 (1938).

Dans ce travail l'auteur énonce (théorème A) la sommabilité (C, 3) de la suite simple $\{s_{nn}\}$ des sommes partielles „carrées“ de la série trigonométrique double de Fourier d'une fonction périodique $F(\xi, \eta)$ sommable (L) en tout point $\xi = x, \eta = y$, où $F(\xi, \eta)$ est continue:

$$(C, 3)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} s_{nn} = F(x, y).$$

Dans le cas où $F(\xi, \eta)$ est bornée le théorème est démontré (§ 3). En l'appliquant à $F(\xi, \eta) = f(\xi) \cdot f(\eta)$ et au point de continuité $\xi = x, \eta = x$ il en déduit le théorème de Hardy-Littlewood sur la sommabilité forte (C, 1) de la série de Fourier de $f(\xi)$ à savoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_0^2 + s_1^2 + \dots + s_n^2}{n+1} = f^2(x).$$

A la fin (§ 4) sont annoncés des résultats nouveaux et fort intéressants relatifs à la série de Laplace et aux séries $\sum a_n T_n(x)$ et $\sum a_n P_n(x)$ dans $(-1, +1)$ données par la suite $\{a_n\}$ de leurs coefficients supposée plurimonoïtone ou totalement monoïtone.

E. Kogbetliantz (Paris).

Karamata, J.: Un théorème sur le procédé de sommabilité de Borel. Publ. Math. Univ. Belgrade **6/7**, 204—208 (1938).

Une preuve nouvelle et très simple du théorème connu: de la sommabilité (B) d'une série $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ découle celle de la série $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, si les sommes partielles s_n vérifient la condition $s_n = O(n^k)$, $n \rightarrow \infty$, k étant une constante positive fixe.

E. Kogbetliantz (Paris).

Mersman, W. A.: A new summation method for divergent series. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 667—673 (1938).

Das Euler-Knopp'sche Summierungsverfahren erster Ordnung, kurz (E, 1)-Verfahren, verwendet die aus den Teilsummen s_n einer Reihe mit den Binomialkoeffizienten

als Gewichten gebildeten Mittel $\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k$. Verf. modifiziert dieses Verfahren dadurch, daß er an Stelle der σ_n die Mittel $\sigma'_n = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{n+1+k} s_k$ verwendet, bei denen

jeweils nur die vom „mittleren“ ab genommenen Binomialkoeffizienten als Gewichte erscheinen, so daß (wie bei den C-Mitteln) stets den Anfangsgliedern die größten Gewichte zukommen. Das sich so ergebende Verfahren umfaßt sowohl das (E, 1)- als auch

das (C, 2)-Verfahren. Es summiert die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ genau im Innern der geschlossenen Kurve $|z^{-\frac{1}{2}}(1+z)| = 2$, woraus insbesondere folgt, daß es von keinem Euler-Knoppschen oder Cesàroschen Verfahren noch so hoher Ordnung umfaßt wird.

F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Karamata, J.: Einige Sätze über die Rieszschen Mittel. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 4, 121—137 (1938).

Die Arbeit enthält eine Reihe von Sätzen Tauberscher Art für die Rieszschen $R(\lambda_n, k)$ -, insbesondere das $R(\lambda_n, 1)$ -Verfahren, die bekannte Ergebnisse in verschiedenen Richtungen ergänzen und erweitern. Dabei wird das $R(\lambda_n, 1)$ -Verfahren in der für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung bequemen Form der verallgemeinerten arithmetischen Mittel zugrunde gelegt: Es sei $p_v \geq 0$ ($v = 1, 2, \dots$), $P_n = \sum_{v=1}^n p_v \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dann heißt die Zahlenfolge $s_n = \sum_{v=1}^n u_v$ ($n = 1, 2, \dots$) $M(P_n)$ -limitierbar zum Wert s , in Zeichen $M(P_n) - \lim s_n = s$, wenn

$$\frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n p_v s_v \rightarrow s \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

gilt. Mit $N(x)$ wird die Anzahlfunktion der Folge P_n bezeichnet. Von den schönen Ergebnissen des Verf. seien genannt: (I) Aus $M(P_n) - \lim s_n = s$ folgt $s_n \rightarrow s$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{n \leq v \leq N} |s_v - s_n| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow 1 \quad (1)$$

gilt, wo $N = N(\lambda P_{n-1}) + 1$ oder $= N(\lambda P_n)$ mit $\lambda > 1$ sein soll. — In (I) ist der Satz von Hardy-Rieszy [The General Theory of Dirichlet's Series, Cambridge Tracts 18 (1915)] enthalten, nach dem das $M(P_n)$ -Verfahren für $P_n = O(p_n)$ mit der Konvergenz äquivalent ist. Ferner enthält (I) die Bedingung von Hardy [Proc. London Math. Soc. (2) 8, 301—320 (1910)], nach der aus $M(P_n) - \lim s_n = s$ auch $s_n \rightarrow s$ folgt, falls $u_{n+1} = O(p_n/P_n)$ gilt, sogar in der abgeschwächten Form $u_n = O(p_n/P_n)$. Diese letztere Bedingung kann, wie weiter gezeigt wird, noch durch $u_n = O(p_n/P_{n-1})$ ersetzt werden, und diese Bedingung läßt sich überdies auf das $R(\lambda_n, k)$ -Verfahren übertragen. Noch allgemeiner wird bewiesen: (II) Ist $\sum_{v=1}^{\infty} u_v$ $R(\lambda_n, k)$ -summierbar ($k > 0$), d. h.

$$\sum_{\lambda_v \leq \omega} \left(1 - \frac{\lambda_v}{\omega}\right)^k u_v \rightarrow s \quad \text{für} \quad \omega \rightarrow \infty,$$

so ist auch $\sum_{v=1}^{\infty} u_v = s$, falls eine der Bedingungen $u_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$ [vgl. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2) 12, 174—180 (1913)], $u_n = O\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right)$ erfüllt ist; beide Bedingungen sind in der allgemeineren

$$\delta(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-r} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \lambda_v^r u_v \right| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty$$

enthalten. — Nach Hardy-Littlewood [Mess. of Math. (2) 43, 143—147 (1914)] und Szász (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1929, 325—340) weiß man, daß sich die Hardy'sche Bedingung $u_{n+1} = O(p_n/P_n)$ unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über P_n bzw. u_n durch die einseitige Bedingung $u_{n+1} = O_L(p_n/P_n)$ ersetzen läßt. Dazu zeigt Verf. u. a.: (III) Aus $M(P_n) - \lim s_n = s$ folgt $s_n \rightarrow s$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{n \leq v \leq N} (s_v - s_n) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \lambda \rightarrow 1 \quad (2)$$

gilt, wo $N = \max\{N(\lambda P_{n-1}) + 1, N(\lambda P_n)\}$ mit $\lambda > 1$ sein soll. — Die Bedingung (2) ist erfüllt, wenn a) u_n oder $u_{n+1} = O_L(p_n/P_n)$ und $P_{n-1} \sim P_n$ gilt (ergänzte Hardy-Littlewoodsche Bedingung), oder wenn b) u_n oder $u_{n+1} = O_L(p_n/P_n)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq 0$

gilt (ergänzte Szászische Bedingung). Endlich ist (2) auch erfüllt, wenn u_n und $u_{n+1} = O_L(p_n/P_n)$ gilt, und diese Bedingung wird noch weiter verallgemeinert zu: (IV) Aus $M(P_n) - \lim s_n = s$ folgt $s_n \rightarrow s$, wenn $u_{n+1} = O_L(p_n/P_n)$ und $= O_L(p_{n+1}/P_n)$ gilt. F. Lösch (Berlin-Adlershof).

Spezielle Funktionen:

Tchakaloff, Lubomir: Sur quelques propriétés de la fonction gamma. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 963—965 (1938).

Bei einer Funktion $f(x)$ der positiven Variablen x wird λ als Grenzwert für $x \rightarrow \infty$ erklärt, wenn eine wachsende Folge positiver Zahlen x_1, x_2, \dots existiert, so daß $\lim x_n = \infty$ und $\lim f(x_n) = \lambda$. Dann wird gezeigt, daß bei reellem $a \neq 0$ die Gesamtheit der Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$ von $\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)}$ identisch ist mit der Gesamtheit

der komplexen Zahlen des Betrages 1. Hieraus wird für die Funktionen $F_1(x) = \frac{1}{2}\{\Gamma(x+a) + \Gamma(x-a)\}$ und $F_2(x) = \frac{1}{2}\{\Gamma(x+a) - \Gamma(x-a)\}$ folgender Satz bewiesen: Bei reellem A, B, C und $A^2 + B^2 > 0$ hat die Gleichung $AF_1(x) + BF_2(x) = C\Gamma(x)$ unendlich viele positive Lösungen, wenn $A^2 + B^2 > C^2$, dagegen keine positive Lösung, wenn $A^2 + B^2 \leq C^2$. B. Schoeneberg (Hamburg).

Okaya, Tokiharu: Sur les fonctions caractéristiques des fonctions-gamma incomplètes. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 618—624 (1938).

If $E(x) = \exp(-\frac{1}{3}x^3)$, $A_n(x) = \int_x^\infty x^n E(x) dx = E(x)Z_n(x)$, $H_n(x)A_n(x) = \int_x^\infty A_n(x) dx$ the author finds that $Z'_n(x) = x^2 Z_n(x) - x^n = (n-2)x^2 Z_{n-3}(x)$, $H_n = Z_{n+1}/Z_n - x$, $A_n H_n = A_{n+1} - x A_n$, $H'_n(x) = x^n H_n/Z_n - 1$. The functions $Z_n(x)$ are said to be useful for the solution of certain hydrodynamical problems. A table is given of the roots of $Z_0(x)$. H. Bateman (Pasadena).

Meixner, J.: Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polynome. Math. Z. 44, 531—535 (1938).

Verf. stellt zunächst die Ableitung der Charlierschen Polynome durch Bildung der sukzessiven Differenzenquotienten der Poissonschen Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie ihre wichtigsten Eigenschaften (Orthogonalität, Rekursionsformeln, Differenzengleichung, erzeugende Funktion) zusammen. Es handelt sich um die Berechnung einer neuen erzeugenden Funktion, welche als Summe von Gliedern definiert wird, die je aus einem Produkt zweier normierter Charlierscher Orthogonalpolynome und einer Potenz bestehen. Verf. summiert eine etwas allgemeinere Reihe. Diese einfach unendliche Reihe multipliziert er mit einem Faktor und bildet dann eine dreifach unendliche Summe. Die Summierung gelingt durch Anwendung elementarer Reihenentwicklungen unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Charlierschen Polynome. Als Ergebnis der Summierung ergibt sich wieder ein Charliersches Polynom, multipliziert mit einem Potenzausdruck. Hierauf berechnet Verf. die Greensche Funktion der Differenzengleichung der Charlierschen Polynome durch Summierung ihrer Reihenentwicklung nach den Orthogonalpolynomen. Die Summierung führt auf hypergeometrische Reihen und Funktionen. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Erdélyi, A.: On certain Hankel transforms. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 196—198 (1938).

Wenn $P(z) = \sum_{m=0}^n c_m z^m$ ein beliebiges Polynom bedeutet, so ist

$$\int_0^\infty e^{-ky} y^\mu P(y) J_\nu(2\sqrt{xy}) dy = \left[\text{mit: } \Re(k) > 0, \Re\left(\mu + \frac{\nu}{2}\right) > -1 \right] \\ = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} k^{-\mu-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2k}} \sum_{m=0}^n c_m \Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2} + m + 1\right) k^{-m} M_{\mu+m+\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Dieser Ausdruck gilt auch, wenn $P(x)$ eine ganze Funktion bedeutet, wenn das In-

tegral der linken Seite und die unendliche Reihe der rechten Seite absolut konvergieren.

Spezialfall: $\mu = \frac{\nu}{2}$;

[mit $\Re(k) > 0$, $\Re(\nu) > -1$]

$$\int_0^{\infty} e^{-ky} y^{\frac{\nu}{2}} P(y) J_{\nu}(2\sqrt{xy}) dy = k^{-\nu-1} x^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x}{k}} \sum_{m=0}^{\infty} m! c_m k^{-m} L_m^{(\nu)}\left(\frac{x}{k}\right) \quad (\text{Laguerre-Polynom}).$$

Wenn $P(x) = L_n^{(\mu+\frac{\nu}{2})}(kx)$, so ist: $\int_0^{\infty} e^{-ky} y^{\mu} J_{\nu}(2\sqrt{xy}) L_n^{(\mu+\frac{\nu}{2})}(ky) dy =$

$$= \frac{\Gamma(\mu + \frac{\nu}{2} + n + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1)} k^{-\mu - \frac{1}{2}n - 1} x^{\frac{n}{2} - 1} e^{-\frac{x}{k}} M_{\mu + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\nu}{2} + \frac{n}{2}}\left(\frac{x}{k}\right)$$

[mit $\Re(k) > 0$, $\Re(\mu + \frac{\nu}{2}) > -1$]. Wenn $P(x) = L_n^{(\alpha)}(x)$, $\nu = \alpha$, so ist:

$$\int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{xy}) L_n^{(\alpha)}\left(\frac{y}{k}\right) dy = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-x} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-k}\right) \quad [\Re(\alpha) > -1].$$

Die Grenzfälle $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow 1$ liefern die Le Royschen Integralausdrücke der Laguerre-Polynome [E. Le Roy, Ann. Toulouse (2) 2, 317—430 (1900)]. S. C. van Veen.

Palamà, Giuseppe: Su taluni polinomi analoghi a quelli di Laguerre e sulla funzione di Bessel. Boll. Un. Mat. Ital. 17, 157—170 (1938).

The author studies the polynomials $L_n^{(\alpha)}(x, a)$ generated by the function $e^{-\frac{xz}{1-az}} \cdot (1-az)^{-(\alpha+1)}$, also the related Appell polynomials

$$A_n^{(\alpha)}(x, a) = L_n^{(\alpha)}(x, a) \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \quad \left(\text{with } \frac{\partial A_n^{(\alpha)}(x, a)}{\partial a} = A_{n-1}^{(\alpha)}(x, a)\right).$$

For the latter the generating function is very simply related to Bessel's Functions. Various recurrence relations are given, also difference- and differential equations are derived for the polynomials in question. We have $L_n^{(\alpha)}(x, a) \equiv a^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{a}\right)$ (Laguerre polynomial). Thus, most of the results, as the author himself observes, follow from those known for Laguerre polynomials. The study of $A_n^{(\alpha)}(x, a)$ yields a formula for Bessel's functions $J_{\alpha}(x)$. J. Shohat (Philadelphia).

Satô, Tunesô: On the summation of an expansion of polynomials of Hermite. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 20, 185—189 (1937).

L'au. généralise la formule de N. Wiener

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) \psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left[\frac{4xyt - (x^2 + y^2)(1+t^2)}{2(1-t^2)}\right],$$

où $\psi_n(x)$ sont les fonctions d'Hermite, en considérant les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \psi_n(x_1) \psi_n(x_2) \dots \psi_n(x_p),$$

où c_n sont des constantes convenables.

N. Obrechhoff (Sofia).

McLachlan, N. W.: Operational forms and contour integrals for Struve and other functions. Philos. Mag., VII. s. 26, 457—473 (1938).

In this paper a large number of operational forms is given. Included are those for Struve functions of half odd integral order, for various circular and hyperbolic functions, for exponential functions and for product Bessel functions. Murnaghan.

Shabde, N. G.: On some integrals involving Bessel functions. Bull. Calcutta Math. Soc. **30**, 29—30 (1938).

Mit Hilfe einer Laplaceschen Transformationsformel für eine Besselsche Funktion erster Art berechnet Verf. das unbestimmte Integral über das Produkt zweier Besselscher Funktionen erster Art, deren Ordnungen gleich der Hälfte ganzer Zahlen sind, dividiert durch die Quadratwurzel aus einer Funktion zweiten Grades. Das Ergebnis ist eine unendliche Reihe, deren Glieder Besselsche Funktionen erster Art halbzahlgiger Ordnung, dividiert durch die Quadratwurzel des Argumentes, multipliziert mit Koeffizienten, die verwickelte Ausdrücke, zusammengestellt aus Gammafunktionen, sind. Dieses allgemeine Ergebnis gilt auch für den Fall, daß die Besselschen Funktionen im Integranden von beliebiger komplexer Ordnung sind. Verf. betrachtet insbesondere den Fall halbzahlgiger Ordnungen. Hierauf integriert er ein Produkt von vier Besselschen Funktionen erster Art beliebiger komplexer Ordnung, wobei ebenfalls von einer Laplaceschen Transformationsformel Gebrauch gemacht wird. Auch in diesem Fall arbeitet er das Ergebnis aus für Besselsche Funktionen halbzahlgiger Ordnung.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Meijer, C. S.: Beiträge zur Theorie der Whittakerschen Funktionen. II. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **41**, 744—755 (1938).

In a previous paper (this Zbl. **19**, 62) the author stated a number of theorems concerning Whittaker functions. In this paper he gives numerous special cases of the theorems, and obtains several functions which are self-reciprocal in the Hankel transform of order ν . Finally, proofs are given of the first three theorems which were stated in the previous paper. Examples of the special cases of the theorems are

$$K_\nu(z^2) I_\nu(z^2) = 4 \int_0^\infty e^{-i \arg z} K_\nu(u^2) I_\nu(u^2) J_{4\nu}(4zu) u du$$

where $|\arg z| \leq \frac{1}{4}\pi$, $R(\nu) > -\frac{1}{4}$, and

$$J_\nu(z^2) Y_\nu(z^2) = -4 \int_0^\infty J_\nu^2(u^2) J_{4\nu}(4zu) u du,$$

where $z > 0$, $R(\nu) > -\frac{1}{4}$. Typical examples of the self-reciprocal functions obtained are

$$x^{2m-\nu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} M_{3m-\nu+\frac{1}{2}, m}(\frac{1}{2}x^2) \quad \text{and} \quad x^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}\nu}(\frac{1}{4}x^2) I_{\frac{1}{2}\nu}(\frac{1}{4}x^2).$$

W. N. Bailey (Manchester).

Petersson, Hans: Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe. Abh. math. Semin. Hansische Univ. **12**, 415—472 (1938).

Es handelt sich um die Poincaréschen Reihen neuer Art, die Verf. früher (vgl. Math. Ann. **103**, 369—436 (1930) und dies. Zbl. **3**, 350; **4**, 12; **17**, 25, 306) eingeführt hat. Gegenstand der Untersuchung ist die Diskussion der linearen Relationen, die im Spezialfall der Modulgruppe zwischen den allgemeinsten Reihen dieses Typus bestehen. § 1 enthält eine Einführung in die Theorie der Modulformen von beliebiger reeller Dimension $-r$ zu einem Multiplikatorsystem ν (abgekürzt: Modulform zu $\{-r, \nu\}$). Verf. entwickelt sie hier, um größere Einfachheit zu erreichen, direkt, statt sie aus seinen früheren Ergebnissen über allgemeine Grenzkreisgruppen durch Spezialisierung auf die Modulgruppe herauszuziehen. Fortan ist stets vorausgesetzt, daß $r > 2$ ist und daß die Werte des Multiplikatorsystems ν sämtlich den absoluten Betrag 1 haben. Es werden die Poincaréschen Reihen $G_{-r}(\tau, \nu; \nu)$ eingeführt, wo τ eine komplexe Variable mit $\Im(\tau) > 0$ und ν eine ganze Zahl ≥ 0 ist. § 2 enthält den Beweis eines Kriteriums dafür, daß die willkürlich vorgegebenen Reihen

$$G_{-r}(\tau, \nu; \nu_1), \quad G_{-r}(\tau, \nu; \nu_2), \quad \dots, \quad G_{-r}(\tau, \nu; \nu_\mu)$$

ein volles System linear-unabhängiger ganzer Spitzenformen zu $\{-r, \nu\}$ bilden, und eine Methode, in endlich vielen Rechenschritten zu entscheiden, ob eine vorgelegte Linearkombination aus endlich vielen $G_{-r}(\tau, \nu; \nu)$ identisch verschwindet oder nicht. Auch

gewisse Linearkombinationen aus unendlich vielen $G_{-r}(\tau, v; v)$ werden behandelt; insbes. verfolgt der Anhang zu § 2 verschiedene fruchtbare Ansätze in dieser Richtung, die zugleich einen Einblick in die Struktur gewisser nichtlinearer Relationen zwischen den $G_{-r}(\tau, v; v)$ von verschiedenen Dimensionen $-r$ vermitteln. In § 3 werden zunächst gewisse Verallgemeinerungen der Reihen $G_{-r}(\tau, v; v)$ aufgestellt, indem an Stelle des Multiplikatorsystems v ein System von Größen des Betrages 1 tritt, das nur einen Teil der Eigenschaften eines Multiplikatorsystems aufweist. Es zeigt sich so, daß ein großer Teil der Resultate in Wahrheit von der automorphen Invarianz unabhängig ist. Außerdem gelingt es, gewisse in der neueren analytischen Zahlentheorie auftretende Ausdrücke zu kennzeichnen und z. B. das identische Verschwinden einer von Rademacher in seinen Arbeiten über Partitionenzahl (s. dies. Zbl. 16, 246; 17, 55) eingeführten Funktion $f^*(x)$ zu beweisen. Zum Schluß wird der Rademachersche Ansatz weitgehend verallgemeinert. — Aus Raummangel ist es leider nicht möglich, in diesem Referat die Einzelheiten konkreter darzustellen, da schon die Erklärung der zum Verständnis unentbehrlichen Bezeichnungen den verfügbaren Raum um ein Vielfaches überschreiten würde. Deshalb sei abschließend der große Reichtum der Abhandlung an interessanten analytischen Beziehungen und aussichtsreichen Ansätzen nachdrücklichst hervorgehoben.

Bessel-Hagen (Bonn).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

● Euler, Leonhard: *Opera omnia*. Ser. 1. Vol. 23. *Commentationes analyticae ad theoriā aequationum differentialium pertinentes*. Vol. 2. Basel, Zürich u. Leipzig: Orell Füssli u. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1938. III, 455 S. Frs. 58.—

Conte, Luigi: *Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine*. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 119—125 (1938).

Eine Bedingung für die Koeffizienten einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, damit ein Integral einer gewissen besonderen Art existiert. Ist die Bedingung erfüllt, so führt man die Integration der Differentialgleichung auf Quadraturen zurück. Beispiele.

G. Cimmino (Cagliari).

Moisseiev, N.: *Sur la construction des régions de la stabilité au sens de Liapounoff*. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 20, 419—422 (1938).

Moisseiev, N.: *Sur les régions de la stabilité dans l'espace des phases*. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 20, 423—425 (1938).

Verf. gibt klassischen Kriterien für die Stabilität bzw. Instabilität von Lösungen von Differentialsystemen eine andere Form. Wegen der Einzelheiten muß auf die Arbeiten selbst verwiesen werden. Direkt anwendbar sind diese Kriterien nur in speziellen, im wesentlichen wohlbekannten Fällen.

Hopf (Leipzig).

Scorza Dragoni, Giuseppe: *Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine*. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 177—215 (1938).

Scorza Dragoni, Giuseppe: *Aggiunta alla memoria: Su un problema di valori ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine*. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 2, 253—254 (1938).

Le problème traité concerne l'équation $y'' = f(x, y, y')$ et les conditions $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$. L'aut. généralise des cas connus où l'on est assuré de l'existence d'une solution au moins; ce sont des cas où f est continu pour $x_0 \leq x \leq x_1$, quels que soient y et y' , et où d'autres conditions sont remplies; relativement au nombre des solutions, l'aut. se contente de rappeler des travaux d'après lesquels, dans certains cas plus particuliers, la solution est unique. L'aut. passe ensuite au cas où y serait astreint à des conditions $\omega_0(x) \leq y \leq \omega_1(x)$, et donne deux systèmes suffisants de conditions, en partie connus, pour l'existence d'une solution au moins. La note complémentaire est consacrée à corriger deux passages où un même défaut s'était glissé dans les démonstrations.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Muggli, Hermann: Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Comment. math. helv. 11, 151—179 (1938).

L'aut. étudie les équations différentielles de la forme

$$\mathfrak{L}F \equiv c_0 F(z) + c_1 F'(z) + \dots + c_p F^{(p)}(z) + \dots = G(z) \quad (1)$$

où les constantes c_p sont données et peuvent être considérées comme les coefficients d'une fonction génératrice $L(u) = \sum c_p u^p$. Il cherche d'abord à quelles conditions doit satisfaire $L(u)$ pour que l'opération $\mathfrak{L}F$ s'applique à une catégorie déterminée de fonctions $F(z)$, et quelles sont alors les propriétés fonctionnelles de $G(z) \equiv \mathfrak{L}F$; il passe ensuite au problème de la résolution de (1) lorsque $L(u)$ et $G(z)$ sont données et vérifient les conditions trouvées. Il suppose que F appartient à l'une des quatre classes suivantes: (A) F est une fonction arbitraire holomorphe dans un certain domaine; (B) F est une fonction entière arbitraire; (C) F est une fonction entière d'ordre fini ϱ au plus, $\varrho \geq 1$; (D) F est une fonction entière qui est au plus du type exponentiel fini, son type étant t au plus. Voici les principaux résultats. — I. $\mathfrak{L}F$ s'applique à toute la classe (A) si et seulement si $L(u)$ est une fonction entière au plus du type minimum de l'ordre 1, $G(z)$ est alors holomorphe en même temps que $F(z)$; si $L(u)$ vérifie la condition indiquée et si $G(z)$ est holomorphe dans un cercle, (1) admet une solution holomorphe dans ce cercle. — II. $\mathfrak{L}F$ s'applique à toute fonction de (B) si et seulement si $L(u)$ est fonction entière du type exponentiel fini, $G(z)$ est alors une fonction entière dont l'ordre et le type ne dépassent pas ceux de $F(z)$; si $L(u)$ vérifie la condition donnée et si $G(z)$ est une fonction entière, (1) admet une solution qui est une fonction entière. — III. $\mathfrak{L}F$ s'applique à toute la classe (C) si et seulement si $L(u)$ est du type exponentiel fini lorsque $\varrho = 1$, et d'ordre inférieur à $\frac{\varrho}{\varrho-1}$ si $\varrho > 1$, $G(z)$ est alors entière et d'ordre ϱ au plus; si $L(u)$ vérifie la condition donnée et si $G(z)$ est entière d'ordre ϱ , $\varrho \geq 1$, (1) admet une solution entière d'ordre ϱ . — IV. $\mathfrak{L}F$ s'applique à toute la classe (D) si et seulement si $L(u)$ est holomorphe pour $|u| \leq t$, $G(z)$ est alors entière d'ordre au plus égal à celui de $F(z)$, si F est effectivement du type exponentiel, le diagramme indicateur de G est contenu dans celui de F ; si $L(u)$ satisfait à la condition indiquée et si $G(z)$ est du type exponentiel fini, de type t au plus, (1) admet une solution entière du type exponentiel dont le diagramme indicateur coïncide avec celui de $G(z)$. Ce dernier énoncé et divers corollaires, qui sont obtenus par une méthode de Pólya [Math. Z. 29 (1929)] appartiennent en propre à l'aut., les autres ayant été obtenus partiellement antérieurement, l'aut. renvoie aux indications générales et à la bibliographie du sujet données par Carmichael (voir ce Zbl. 14, 260) et Davis (ce Zbl. 15, 352).

G. Valiron (Paris).

Conte, Luigi: Equazione differenziale delle asintotiche di particolari superfici. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 126—128 (1938).

Bemerkung über einen Fall, wo es unmittelbar ersichtlich ist, wie sich die Differentialgleichung der Asymptotenlinien einer Fläche in einer von Mitrinovich angegebenen Form schreiben läßt.

G. Cimmino (Cagliari).

Germaey, R.-H.-J.: Sur l'intégration par approximations successives des systèmes en involution d'équations simultanées, aux dérivées partielles du premier ordre, à une fonction inconnue. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 525—534 (1938).

Vorgelegt sei das System von simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_m, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_m}) \quad (i = 1, \dots, r)$$

für die unbekannte Funktion z der unabhängigen Veränderlichen x_1, \dots, x_r und der Parameter y_1, \dots, y_m ; zwischen den gegebenen Funktionen f_i seien die nötigen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt. Gesucht wird die Lösung $z = \Phi$ des Systems, die sich für $x_i = x_i^{*0}$ auf eine vorgegebene Funktion $\varphi(y_1, \dots, y_m)$ reduziert; dazu werden

nacheinander $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}^{*0} \dots x_r^{*0}, y_1, \dots, y_m, \varphi_k, \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_m})$$

und der Anfangsbedingung, sich für $x_k = x_k^{*0}$ auf φ_{k-1} zu reduzieren, bestimmt; dies kann mit Hilfe der sukzessiven Approximationen unter Benutzung des Systems der charakteristischen (gewöhnlichen) Differentialgleichungen geschehen. Dann ist $\varphi_r = \Phi$.

Collatz (Karlsruhe).

Boggio, T.: Sulle soluzioni di un sistema di equazioni con derivate parziali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 529—534 (1938).

Das lineare Differentialsystem $\mathfrak{P}_i f = u_i$ ($i = 1 \dots r$) mit konstanten Koeffizienten und den unabhängigen Variablen $x_1 \dots x_r$, sowie den bekannten Funktionen u_i und der gesuchten Funktion f , kann man, falls seine Integrationsbedingungen $\mathfrak{P}_i u_k = \mathfrak{P}_k u_i$ erfüllt sind, dadurch integrieren, daß man in bekannter Weise den Operatoren \mathfrak{P}_i die charakteristischen Polynome $P_i(x_1 \dots x_r)$ zuordnet (sie seien paarweise teilerfremd), durch Elimination von $x_2 \dots x_r$ aus den Gleichungen $P_i = 0$ die Resultante $R(x_1)$

bildet und die Polynome P'_i so bestimmt, daß $\sum_{i=1}^r P_i P'_i = R(x_1)$ ist; dann erfüllt f die gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $\mathfrak{R}f = \sum_{i=1}^r \mathfrak{P}'_i u_i$.

Enthalten speziell die P_i die Größe x_1 nicht und haben sie keine Nulllösung gemein, so kann man $R = 1$ setzen und erhält $f = \sum_{i=1}^r \mathfrak{P}'_i u_i$; hierin sind die \mathfrak{P}'_i nicht eindeutig festgelegt, trotzdem ist die Lösung f einzig. — Es folgen einige Bemerkungen zu einer Kritik von B. Segre (Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27; dies. Zbl. 19, 66).

Harald Geppert (Gießen).

Moisil, Gr. C.: Richiami geometriei sul metodo di integrazione di Hadamard-Théodoresco. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 537—540 (1938).

Nach Hadamard hat sich die Zweckmäßigkeit erwiesen, einen in passender Weise definierten Riemannschen Raum an jede lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für eine Funktion von n Veränderlichen anzuknüpfen. Nun zeigt Verf., unter Benutzung solcher differentialgeometrischer Hilfsmittel, wie sich die Gleichung in einer besonders einfachen Form schreiben läßt.

G. Cimmmino (Cagliari).

Frola, E.: Il problema di Cauchy in grande, e le equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 518—524 (1938).

Es handelt sich um die Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{rst} C_{rst} \frac{\partial^{r+s+t} u}{\partial x_1^r \partial x_2^s \partial x_3^t} = 0 \quad (r + s + t \leq n).$$

Verf. geht vom Ansatz

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(m, n, x_1) e^{-i(m x_2 + n x_3)} dm dn$$

aus, so daß α , unter passenden Regularitätsannahmen, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu befriedigen hat. Sei k ($\leq n$) die Ordnung dieser Gleichung. Sollen n und ihre $k - 1$ ersten partielle Ableitungen nach x_1 für $x_1 = 0$ vorgegebene Werte annehmen, so gilt das auch für $\alpha(x_1, m, n)$. Nun sind, um ein gewisses reguläres Verhalten für $x_1 \rightarrow \infty$ zu gewährleisten, nur solche Lösungen $\alpha(x_1, m, n)$ brauchbar, welche Wurzeln mit nichtpositivem reellem Teil der charakteristischen Gleichung entsprechen. Daraus entstehen unter Umständen Einschränkungen für die vorgegebenen Werte auf der Ebene $x_1 = 0$, damit das Problem mit dem erfordernten Verhalten für $x_1 \rightarrow \infty$ lösbar sei.

G. Cimmmino (Cagliari).

Metschwarischwili, J.: Über die Grenzlösungen der Differentialgleichungen von hyperbolischem Typus mit variablen Koeffizienten für den Fall von zwei unabhängigen

Veränderlichen. Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 163—220 u. dtsch. Zusammenfassung 220—224 (1933) [Russisch].

Es sei

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Nach Sobolew [Stekloff-Institut 9 (1935); dies. Zbl. 11, 352] heißt eine Funktion $\bar{u}(x, y, t)$ in einem Gebiet \mathfrak{G} eine verallgemeinerte Lösung (Grenzlösung) der Differentialgleichung $L(u) = 0$, wenn u summierbar in \mathfrak{G} ist und wenn es eine Folge von Lösungen $U_n(x, y, t)$ der Differentialgleichung gibt, die gegen \bar{u} in dem Sinne konvergiert, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iiint_{\mathfrak{G}} |U_n(x, y, t) - \bar{u}(x, y, t)| dx dy dt = 0$$

ist. Nach Sobolew ist \bar{u} genau dann eine verallgemeinerte Lösung, wenn

$$\iiint_{\mathfrak{G}} \bar{u} L(v) dx dy dt = 0$$

ist für jeden abgeschlossenen Bereich G , der in \mathfrak{G} liegt und von einer geschlossenen Fläche F begrenzt wird, sowie jede Funktion $v(x, y, t)$, die in G zweimal stetig differenzierbar ist und mit ihren Ableitungen erster Ordnung auf F verschwindet. Verf. übernimmt die obige Begriffsbildung für die Differentialgleichung mit veränderlichen Koeffizienten $L(u) = 0$, $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u$ und findet

$$\iiint_G \bar{u} \bar{L}(v) dx dy = 0$$

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß \bar{u} verallgemeinerte Lösung ist; dabei bedeutet \bar{L} den zu L adjungierten Differentialausdruck. Kamke (Tübingen).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

● Stephens, E.: The elementary theory of operational mathematics. London: McGraw-Hill 1937. XII, 313 pag. 21/-.

Ekelöf, Stig: The transients of an inductively shunted electric transmission line with special reference to the impulse transmission in selective-calling telephone systems. Stockholm: Diss. 1937. 98 S.

Das vom Verf. behandelte Problem ist folgendes: Vorgelegt sei eine elektrische Leitung mit stetig verteilten Leitungskonstanten, wobei über die üblichen Konstanten hinaus noch eine stetig verteilte Selbstinduktion zwischen den Leitern der Leitung angenommen wird. Die Leitung ist unendlich lang. Am Anfang wird in einem gewissen Zeitpunkt eine Spannungsquelle eingeschaltet. Welche sind die entstehenden Ströme und Spannungen auf der Leitung? Mathematisch interessiert vor allem die ausführliche Darlegung der Grundlagen des Operatorenkalküls, den Verf. zur Lösung verwendet. Er zeigt, daß unter Verwendung einer Funktion der Zeit, welche für alle negativen Zeiten gleich Null und für alle positiven Zeiten gleich Eins ist (Einheitsfunktion), die Lösung der Aufgabe auf die Berechnung eines unendlichen Integrals in der komplexen Ebene führt. An Stelle dieser älteren Fassung der Grundaufgabe ist von neueren Autoren die Inversion dieses Integrals zum Ausgangspunkt gemacht. Damit gelangt man zur Auffassung des Operatorenkalküls als verkürzte Schreibweise von Anwendungen der Laplaceschen Transformation. Verf. geht von der zuerst genannten Formulierung der Grundaufgabe aus, da diese, wie er zeigt, gewisse Vorteile aufweist. Der Integrand des unendlichen Integrals muß auf Grund des Jordanschen Satzes gewissen Beschränkungen unterworfen werden. Auf Grund des Borelschen Satzes gelangt man zu einer einfachen Formulierung für das Produkt zweier Operatoren. Verf. stellt die einfachsten Regeln für das Rechnen mit Operatoren zusammen und behandelt ausführlich jenen Operator, der auf die unvollständige Gammafunktion führt. Für alle verwendeten Sätze führt Verf. Beweise an. Die numerische Anwendung

der Formeln auf das genannte Problem, wobei verschiedene Fälle in Betracht gezogen werden, und die ausführliche Zusammenstellung von Rechnungs- und Meßergebnissen beschließen die Arbeit.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Cabras, Angelina: *Risoluzione di un problema relativo alle sollecitazioni impressesui sistemi continui.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 541—545 (1938).

In this paper the author treats, by the methods of Heaviside's operational calculus, the problem of linear wave propagation. She gives the interpretation of the operator

$\sqrt{\frac{p+q\Delta}{a+b\Delta}}$ where $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$ and a, b, p, q are constants. The familiar solution, involving Bessel functions of a purely imaginary argument, is obtained. *Murnaghan.*

Carlsaw, H. S., and J. C. Jaeger: *Some problems in the mathematical theory of the conduction of heat.* Philos. Mag., VII. s. 26, 473—495 (1938).

The method of the inverse Laplace transformation is applied to several problems in the conduction of heat. The chief novel feature is a deformation of the path of integration ($c - i\infty$ to $c + i\infty$) into one which permits an expansion of the integral obtained by inverting the integral of Laplace's type constructed in the application of the method. The first problem is one of linear flow in a rod of length l when the initial temperature of the rod is equal to the constant temperature maintained at one end and the other end of the rod is at temperature zero. Two forms of the method are used for this problem. Some remarks are made on the assumptions made in the course of the work. The next section deals with a unit source in a semi-infinite solid and later sections deal with a solid bounded by parallel planes, the case of radiation into a medium at zero temperature being also considered. — In the second part of the paper problems relating to a circular cylinder are discussed with the aid of Bessel functions of different types.

H. Bateman (Pasadena).

Gorgidze, A.: *Über eine Methode der konsekutiven Näherungen in der Elastizitätstheorie.* Trav. Inst. Math. Tbilissi 4, 13—40 u. dtsh. Zusammenfassung 41—42 (1938) [Russisch].

Der Verf. benutzt die von Michlin [Publ. Inst. Seismol. Acad. Sci. URSS 39 (1934); dies. Zbl. 10, 357] angegebene Methode zur Bestimmung der biharmonischen Funktion w in einem von endlich vielen Kurven C_k , $k = 1, 2, \dots, n$, begrenzten Gebiete (das den Punkt ∞ enthält), falls w_x und w_y bekannt sind. $w_x \equiv \partial w / \partial x$. Sei G_n das Äußere von C_k . Sei $w^{(k1)}$ diejenige in G_k biharmonische Funktion, so daß $w_x^{(k1)} + iw_y^{(k1)}$ auf C_k die vorgegebenen Werte $u_0 + iv_0$ annimmt. Der Verf. betrachtet dann $w^{(1)} = \sum_k w^{(k1)}$

als die erste Annäherung. — Sei $u_1 + iv_1 = u_0 + iv_0 - (w_x^{(1)} + iw_y^{(1)})$. — Der Verf. bestimmt diejenigen in G_k biharmonischen Funktionen $w^{(k2)}$, so daß $w_x^{(k2)} + iw_y^{(k2)}$ auf C_k gleich $u_1 + iv_1$ wird; er setzt $w^{(2)} = \sum w^{(k2)}$, und dieses Verfahren setzt er ad infinitum fort. In $w = \sum_s \sum_k w^{(ks)}$ erhält er die gesuchte Lösung, da die Reihe nebst ihren Ableitungen

gleichmäßig konvergiert. — Der Verf. zeigt dann, daß die ebene Aufgabe der Elastizitätstheorie, und zwar sowohl bei vorgegebenen Randspannungen wie bei vorgegebenen Verschiebungen oder gemischten Randbedingungen auf die von ihm behandelte mathematische Aufgabe führt. — In analoger Weise wird das räumliche elastische Problem behandelt. Unter Annahme, daß man für einzelne einfach zusammenhängende Bereiche die Aufgabe lösen kann, berechnet der Verf. unter geeigneten Randangaben die elastischen Spannungen für einzelne Gebiete; er bildet dann, wie früher, die Summen, welche unter geeigneten Voraussetzungen konvergieren und gibt die Spannungen in dem betrachteten mehrfach zusammenhängenden Gebiet an. *Stefan Bergmann.*

Serman, D. J.: *Sur la distribution des nombres caractéristiques d'équations intégrales du problème plan de la théorie d'élasticité.* Publ. Inst. Séismol. Acad. Sci. URSS Nr 82, 1—24 (1938) [Russisch].

It is known that the plane problem of the theory of elasticity can be reduced to a Fredholm integral equation (Mushelishvili, Some fundamental problems of

mathematical theory of elasticity. Second ed. Leningrad 1935.). The author shows that, in the case of a finite simply connected domain, the characteristic values of this equation must be real and exceed 1 in absolute value. It is shown that this result can be extended to the case of an infinite domain. *J. D. Tamarkin* (Providence).

Bradistilov, G.: Über periodische und asymptotische Lösungen beim n -fachen Pendel in der Ebene. *Math. Ann.* **116**, 181—203 (1938).

An explicit proof of the existence of certain periodic and asymptotic solutions in the neighborhood of both stable and unstable equilibrium points is given for the n -fold compound pendulum. All the results are deducible as special cases from well known work beginning with Poincaré and worked out in detail by J. Horn [*Z. Math. Phys.* **48**, 400—434 (1903)] and O. Perron [*Math. Z.* **29**, 129 (1929)]. *D. C. Lewis*.

Stefani, Valeria: Sull'integrazione di taluni problemi al contorno relativi al Δw e al $\Delta \Delta w$. *Rend. Semin. mat. Roma*, IV. s. 2, 224—244 (1938).

Verf. betrachtet, eine Methode von M. Picone (dies. Zbl. **14**, 261) benutzend, folgende beiden Probleme: A. eine Lösung w der Gleichung $\Delta w = f(\varrho, \theta)$ im Innern des Kreises $0 \leq \varrho \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ zu finden, für welche die Linearkombination $w + \beta w_\varrho$ zu gegebenen Werten $V(\theta)$ strebt, wenn $\varrho \rightarrow R$; B. eine Lösung w der Gleichung $\Delta \Delta w = f(\varrho, \theta)$ im Innern desselben Kreises zu finden, für welche die zwei Linearkombinationen $\alpha_i w + \beta_i w_\varrho + \gamma_i w_{\varrho\varrho} + \delta_i w_{\varrho\varrho\varrho}$ zu gegebenen Werten V_i ($i=1, 2$) streben, wenn $\varrho \rightarrow R$ (f, V, V_i stetige, in θ periodische Funktionen, $\beta, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ Konstanten). Die erwähnte Methode führt zu Reihenentwicklungen, über die man nur das behaupten kann, daß sie die Lösungen der beiden Probleme darstellen, wenn solche Lösungen existieren. Nun handelt es sich hier hauptsächlich darum, zu zeigen, daß die von diesen Reihenentwicklungen dargestellten Funktionen die genannten Probleme tatsächlich auflösen, womit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung festgestellt wird. Das gelingt unter teilweise voraussichtlich überflüssigen Regularitätsvoraussetzungen über f und die Randwerte (Existenz einer gewissen Anzahl von stetigen Ableitungen). In einigen Fällen kann Verf. auch endliche Ausdrücke für die Summe der auftretenden Reihenentwicklungen angeben und als Sonderfälle altbekannte Formeln von T. Boggio und G. Lauricella wiedergewinnen. *G. Cimmino*.

Wavre, Rolin: Sur le potentiel newtonien et la théorie des fonctions analytiques. *Acta Litt. Sci. Szeged* **8**, 185—190 (1937).

Résumé sans formules de deux conférences (Nov. 1936, à Budapest et Szeged; sur l'état actuel des questions suivantes: Singularités de la fonction harmonique qui coïncide avec un potentiel dans un domaine hors des masses. Recherche du prolongement (Bruns etc.; fonction de passage de l'auteur basée sur le théorème de Cauchy-Kowalewski). (Voir ce Zbl. **16**, 256). Extensions du potentiel avec variables complexes à partir des séries ou des intégrales. Fonctions multiformes obtenues. Recherche des corps engendrant un potentiel égal dans un domaine à une fonction donnée. Il s'agit toujours de potentiels classiques de volume, de simple ou double couche. *Brelot* (Bordeaux).

Beckenbach, E. F.: A relative of the lemma of Schwarz. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 698—707 (1938).

Let $g(z)$ be a real subharmonic function of the complex variable $z = r \exp i\theta$, $|z| < 1$. Then the integral $l(r, \theta, g) = \int_0^r g(\varrho \exp i\theta) d\varrho$ exists in the Lebesgue sense.

Theorem: If $l(r, \theta, g) \leq 1$ for all (r, θ) with $r < 1$, then $l(r, \theta, g) \leq r$, $g(0) \leq 1$, and the sign of equality holds if and only if $g(z) \equiv 1$. This theorem is then applied to various questions in Analysis and Geometry, particularly to minimal surfaces and surfaces of negative curvature. *Tibor Radó* (Columbus).

Grunsky, Helmut: Die Energie einer Ladungsverteilung beim logarithmischen Potential. *Deutsche Math.* **3**, 501—504 (1938).

Liegt im dreidimensionalen Raume eine beliebige Verteilung von Ladungen vor, die dort ein Newtonsches Potential erzeugen, so ist die zugehörige Energie stets nicht-

negativ. Verf. beweist, daß im Falle des logarithmischen Potentials die Energie $\geq -c^2 \log k$ ist, wo c die Gesamtladung und k die Kapazitätskonstante der beschränkten Punktmenge bezeichnet, über welche die Ladung verteilt ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur in dem Fall der Gleichgewichtsverteilung. *V. Paatero (Helsinki).*

Brelot, Marcel: Sur le potentiel et les suites de fonctions sous-harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 836—838 (1938).

Si dans un domaine borné Ω les fonctions sous-harmoniques u_n sont bornées supérieurement dans leur ensemble, et si elles admettent une limite u non partout infinie négative, il existe dans Ω une fonction sous-harmonique qui coïncide avec u en tous les points qui n'appartiennent pas à un certain ensemble dont la capacité est nulle. Après avoir esquissé une démonstration de ce théorème, l'aut. en déduit une nouvelle démonstration du fait que l'ensemble des points irréguliers de la frontière de Ω , relativement au problème de Dirichlet, a une capacité nulle. *Georges Giraud.*

Inoue, Masao: Sur la stabilité du problème de Dirichlet. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 273—277 (1938).

L'auteur reprend les études de Keldych-Lavrentieff sur le problème de Dirichlet „par l'extérieur“ d'un domaine Ω borné de l'espace ordinaire sans frontière intérieure. Un point-frontière P est dit „de stabilité“ si cette solution considérée sur Ω admet en P une limite égale à la valeur donnée. Divers critères de stabilité sont indiqués. En particulier (et il serait intéressant d'avoir les démonstrations) il faut et suffit: 1° que la fonction de Green par l'extérieur (avec choix d'un pôle intérieur fixe) considérée sur Ω s'annule en P ; 2° ou encore qu'une série analogue à celle de Wiener diverge (cela entraînerait, je le souligne plus que l'auteur, l'équivalence de cette définition de la stabilité avec la dernière de Keldych-Lavrentieff, s'exprimant par l'égalité en P de la valeur donnée et de la solution par l'extérieur considérée comme définie [par le passage à la limite fondamental] sur la fermeture de Ω). La stabilité de Ω signifie l'égalité dans Ω des solutions par l'extérieur et de Wiener; un critère nécessaire et suffisant qui est développé est l'égalité des capacités de Ω et de sa fermeture. *Brelot (Bordeaux).*

Cabrera, N.: Sur la perturbation d'un problème de valeurs propres par déformation de la frontière. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1175—1177 (1938).

Sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Operators mit einer linearen Randbedingung auf einer im Endlichen liegenden geschlossenen Fläche bekannt, so läßt sich die Eigenwertstörung bis zur zweiten Näherung berechnen, wenn dieselbe Randbedingung statt auf S_0 auf einer benachbarten Fläche S zu erfüllen ist. Wesentlich für die angewandte Methode ist die Einführung eines Operators, der jede Funktion, die auf S_0 die Randbedingung erfüllt, in eine solche überführt, die es auf S tut. (Vgl. auch L. Brillouin, dies. Zbl. 16, 359.) *J. Meixner (Gießen).*

Poritsky, Hillel: On a mixed boundary condition for harmonic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 723—725 (1938).

In früheren Arbeiten (dies. Zbl. 18, 26; 19, 25) hat Verf. das Randwertproblem für Potentialfunktionen u , für die längs einer Ebene $\frac{\partial u}{\partial n} + \text{konst.} \cdot u = 0$ ist, und die Spiegelung ihrer Singularitäten längs dieser Randebene behandelt. Verf. bemerkt, daß seine Ergebnisse eine spezielle Anwendung bei der Ermittlung der Oberflächenwellen einer schweren Flüssigkeit zulassen. *Harald Geppert (Gießen).*

Variationsrechnung:

● **Grüss, Gerhard:** Variationsrechnung. (Hochschulwiss. in Einzeldarstell.) Leipzig: Quelle & Meyer 1938. VIII, 247 S. u. 39 Abb. RM. 4.60.

Chapters I—IV: The non-parametric problem in the plane; necessary conditions, sufficient conditions, Hamilton-Jacobi theory, studied by classical methods (as, e.g., in Bolza's Variationsrechnung). Chapter VI: The Weierstrass theory (parametric pro-

blems in the plane), likewise by classical methods. Chapter VII contains a brief study of certain more general problems. For problems involving higher derivatives, problems in n -space and double integral problems the Euler equations are developed; also the multiplier rule for isoperimetric problems. The Hamilton-Jacobi theory is applied in detail to the action integral. The direct method of Ritz is described and applied to a problem. Hurwitz' solution of the classical isoperimetric problem is set forth.

McShane (Virginia).

Damköhler, Wilhelm: Funktionen geringster Steilheit. Math. Ann. 116, 104—154 (1938).

Let \mathfrak{B} be a simply connected region of the xy -plane, and let \mathfrak{M} be a closed point set in \mathfrak{B} . Let C denote an integral curve of the differential system $x' = \xi_1(x, y)$, $y' = \xi_2(x, y)$, and let ds_c denote the positively oriented differential of arc along C . Let $\Delta(x, y)$ be continuous in \mathfrak{B} , and $\Delta(x, y) \geq m_1 > 0$. Let $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ denote the aggregate of all functions $f(x, y)$ defined and continuous in \mathfrak{B} , and such that for every integral curve C we have $df/ds_c \geq \Delta(x, y)$ at almost all the points of C in \mathfrak{M} at which the derivative exists. The "steepness" T_f of a function f is defined as the upper bound of

$$\left| \frac{f(P_2) - f(P_1)}{E(P_1, P_2)} \right|,$$

where $E(P_1, P_2)$ is the length of the shortest line in \mathfrak{B} joining P_1 and P_2 . Let $T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ denote the lower bound of T_f on the class $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$. Let $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ denote the class of all closed oriented curves c lying in \mathfrak{B} and intersecting \mathfrak{M} . Let

$$q(c) = \frac{\int \Delta ds}{\int ds},$$

where c' is the subset of c lying on \mathfrak{M} at each point of which c' has the same direction as the integral curve C passing through the same point, and $c'' = c - c'$. Let $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ denote the upper bound of $q(c)$ on $\mathfrak{C}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$. Then $T(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}) = \bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$. — The author considers also a modification of the problem in which the functions f are supposed to have continuous first derivatives. — On page 115 the author makes the statement (which seems erroneous) that when $\bar{q}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ is finite the functions of the class $\mathfrak{F}(\mathfrak{B}, \mathfrak{M})$ are equally continuous. — The result of the lemma beginning on p. 117 has been noted before. See McShane, this Zbl. 10, 346; Whitney, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), p. 63, footnote (this Zbl. 8, 249).

Graves (Chicago).

Damköhler, Wilhelm: Berichtigung zu der vorstehenden Arbeit: Funktionen geringster Steilheit. Math. Ann. 116, 155—156 (1938).

Terpstra, F. J.: Die Darstellung biquadratischer Formen als Summen von Quadraten mit Anwendung auf die Variationsrechnung. Math. Ann. 116, 166—180 (1938).

Die Abhandlung besteht aus zwei Teilen, die jeder unabhängig vom anderen für sich lesbar sind, einem auf die Variationsrechnung bezüglichen und einem rein algebraischen. Es sei $f(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha})$ die Grundfunktion eines mehrfachen Variationsproblems; hierin steht $p_{i\alpha}$ für $\frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}$, lateinische Indizes laufen von 1 bis n , griechische von 1 bis μ . Mit der Abkürzung

$$f_{i\alpha, j\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial p_{i\alpha} \partial p_{j\beta}}$$

betrachte man die doppelquadratische Form:

$$f_{i\alpha, j\beta} \xi_i \xi_j \eta_\alpha \eta_\beta. \quad (1)$$

Jedem Flächenelement $(t_\alpha, x_i, p_{i\alpha})$ ist eine solche Form zugeordnet; das Flächenelement heißt regulär, singular, irregulär, je nachdem die zugehörige Form (1) definit, semidefinit, indefinit ist. Nach einer briefl. Mitteilung von Herrn Boerner an Verf. ist jedes Flächenelement einer Minimalfläche entweder positiv regulär oder positiv singular. Verf. nennt ein positiv reguläres Flächenelement E stark regulär, wenn jede

Extremalfläche, die E enthält, in der Umgebung von E Minimalfläche ist. Er beweist dann, daß ein Flächenelement E sicher dann stark regulär ist, wenn die folgende Bedingung B erfüllt ist: In der Schar quadratischer Formen

$$f_{i\alpha, j\beta} x_{i\alpha} x_{j\beta} - \lambda_{i\alpha, j\beta} (x_{i\alpha} x_{j\beta} - x_{j\beta} x_{i\alpha}),$$

die man E zuordnen kann, ist mindestens eine positiv definite Form enthalten. Durch Vermittlung zweier Hilfssätze wird die Frage nach einem hinreichenden Kriterium für das Erfülltsein der Bedingung B von folgender Frage abhängig gemacht: „Kann jede doppeltquadratische positiv definite Form als Summe von Quadraten bilinearer Formen geschrieben werden?“ Verf. beweist mittels der Theorie der Polynomideale durch eine Kontinuitätsmethode, daß dies für $n \leq 2$ oder $\mu \leq 2$ immer möglich ist, während es für jedes Wertepaar n, μ mit $n \geq 3, \mu \geq 3$ passende Formen gibt, bei denen dies nicht möglich ist. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Hestenes, M. R.: A sufficiency proof for isoperimetric problems in the calculus of variations. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 662—667 (1938).

The author considers the problem of minimizing the integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_i, y'_i) dx$ in the set of arcs of class D' which satisfies m isoperimetric conditions $\int_{x_1}^{x_2} f_\alpha(x, y_i, y'_i) dx = l_\alpha$.

It is shown that a normal extremal arc E_0 , which satisfies the strengthened conditions of Weierstrass and Legendre and along which the second variation is positive for every non-trivial set of admissible variations, can be embedded in a neighborhood of such character that every other admissible arc in this neighborhood, which joins the endpoints of E_0 gives the integral a larger value than E_0 does. The method used in this paper is closely related to that followed by Birkhoff and Hestenes (see this Zbl. 14, 316).

Arnold Dresden (Swarthmore).

Fuchs, W. H. J., and P. Weiss: Uniqueness theorems and the maximum-minimum principle for a type of non-linear partial differential equations. Proc. Cambridge Philos. Soc. 34, 527—533 (1938).

Für das Eulersche System partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung eines Variationsproblems mit mehreren unbekannten Funktionen von mehreren Veränderlichen folgt aus der Greenschen Formel unter einer allgemeinen Voraussetzung (welche darin besteht, daß ein gewisser Ausdruck immer ≥ 0 sein soll) die Eindeutigkeit der Lösung der Haupttrandwertprobleme. Bei einem Variationsproblem mit einer unbekannten Funktion allein, wenn ferner die Konstanten Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung sind, nehmen die Extremalfunktionen ihr Maximum und Minimum in jedem geschlossenen Gebiete in Randpunkten des Gebietes an. *G. Cimmino*.

Herzberger, M.: Theory of transversal curves and the connections between the calculus of variations and the theory of partial differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 466—473 (1938).

Der Verf. bespricht zunächst einige Eigenschaften der Lagrangeschen Klammer-symbole und zeigt dann, daß zwischen der Geometrie der transversalen Kurven, den partiellen Differentialgleichungen und dem Variationsproblem gewisse Identitätsbeziehungen bestehen. Er kommt so u. a. zu dem Ergebnis, daß die folgenden Probleme mathematisch äquivalent sind: 1. die Existenz eines Energieintegrals, d. h. einer Funktion, die längs der transversalen Kurven unverändert bleibt, 2. die Existenz eines konservativen Variationsprinzips, 3. die Existenz einer Differential- bzw. Integral-invariante und 4. die Welleneigenschaft, daß alle von einem Punkte ausgehenden Kurven eine sie begleitende Wellenfläche besitzen. *Picht* (Babelsberg).

Douglas, Jesse: A Jordan space curve having the infinite area property at each of its points. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 490—495 (1938).

A Jordan curve J in three-space is constructed having the following property. If Σ is any surface bounded by J , and S any sphere with center on J , the area of

the portion of Σ included in S is infinite. The effect is produced by constructing J so as to link infinitely many tori, dense along J . *McShane* (Virginia).

Kwal, Bernard: Quelques généralisations relativistes des équations fondamentales de la mécanique analytique. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 1028—1030 (1938).

Remarking that Hamilton's equations in dynamics have already been generalised to the case of ν independent variables (see De Donder, this Zbl. **13**, 169), the author generalises them still further by taking a tensor instead of a scalar variational equation and introducing a tensor Hamiltonian function. Results are given for four cases. There are no applications and there is no mention of relativity except in the title.

H. S. Ruse (Southampton).

Théodoridès, Phrixos: La navigation aérienne par vent variable. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 39—54 (1938).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

● **Czuber, Emanuel:** Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Bd. 1: Wahrscheinlichkeitstheorie, Fehlerausgleichung, Kollektivmaßlehre. 5., durchges. Aufl. Mit einem Vorwort v. H. Münzner. (B. G. Teubner's Samml. v. Lehrbüchern a. d. Geb. d. math. Wiss. Bd. 9, H. 1.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1938. XII, 480 S. u. 26 Fig. RM. 17.80.

Teodorescu, C. C.: Une application du principe d'égalité probabilité. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 301—304 (1938).

Bacon, H. M.: Note on a formula for the multiple correlation coefficient. Ann. math. Statist. **9**, 227—229 (1938).

Herleitung der bekannten Formel

$$r_{1.2\dots n}^2 = b_{12.3\dots n} \frac{s_2}{s_1} r_{12} + \dots + b_{1n.2\dots(n-1)} \frac{s_n}{s_1} r_{1n},$$

wo $r_{1.2\dots n}$ der multiple Korrelationskoeffizient, r_{12}, \dots, r_{1n} die totalen Korrelationskoeffizienten, $b_{12.3\dots n}, \dots, b_{1n.2\dots(n-1)}$ die partiellen Regressionskoeffizienten und s_1, \dots, s_n die (marginalen) Streuungen sind.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Wiener, Norbert: The homogeneous chaos. Amer. J. Math. **60**, 897—936 (1938).

Zu den mathematischen Grundlagen der statistischen Betrachtungsweise in der Mechanik gehört die allgemeine Maß- und Integrationstheorie. Gegenüber dem Fall endlich vieler Freiheitsgrade ist man in der Frage nach dem richtigen Volumbegriff bei Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden noch nicht weit vorgedrungen. Zur Aufhellung dieser im Hinblick auf das ungelöste Turbulenzproblem bedeutsamen Frage bedarf es noch vieler Vorarbeit. Solcher Vorarbeit ist die Arbeit des Verf. gewidmet. Ref. hat sich im Bericht über dieselbe einige Reserve auferlegen müssen, da die Art der Darstellung beim Leser nicht unerhebliche Anforderungen an die Fähigkeit zu raten stellt. Es wäre wünschenswert, die scharfsinnigen und wichtigen Untersuchungen des Verf. in die Sprache der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, der zufälligen Größen und stochastischen Prozesse zu übersetzen, da dem Ref. dann der Kern klarer und natürlicher hervortreten scheint. Der Boden dafür ist wohl jetzt durch die Arbeiten von Khintchine, Kolmogoroff, Doob u. a. genügend vorbereitet.

Das „Chaos in n Dimensionen“ ist eine zufällige Größe $z(X)$, die noch vom laufenden Punkt X des Euklidischen Raumes R_n abhängt. Die Zufälligkeit besteht darin, daß für irgendwelche festen Punkte X_1, \dots, X_k das Verteilungsgesetz des k -fachen Wertesystems $(z(X_1), \dots, z(X_k))$ gegeben ist. Beim „homogenen Chaos“ ist das Verteilungsgesetz gegenüber einer beliebigen Translation $X_i \rightarrow X_i + Y$ invariant. Die Theorie gewinnt erst die richtige

Abrundung und Anwendungsfähigkeit, wenn man dem Chaosbegriff mit Verf. folgende allgemeine Fassung gibt. Ist zunächst Σ ein Teilgebiet des R_n , so hat unter gewissen Integrabilitätsvoraussetzungen

$$\mathfrak{F}(\Sigma) = \int_{\Sigma} z(X) dV_X \quad (1)$$

einen Sinn und stellt eine zufällige Größe dar, die noch additiv von der Menge Σ abhängt.

$$\mathfrak{F}(\Sigma_1 + \Sigma_2) = \mathfrak{F}(\Sigma_1) + \mathfrak{F}(\Sigma_2), \quad \Sigma_1 \Sigma_2 = 0. \quad (2)$$

Die Verteilung des Wertesystems $(\mathfrak{F}(\Sigma_1), \dots, \mathfrak{F}(\Sigma_k))$ ist bei festen Σ_i wohlbestimmt. Das allgemeine Chaos des Verf. ist nun eine zufällige Größe $\mathfrak{F}(\Sigma)$ mit der Eigenschaft (2). Im Falle (1) handelt es sich speziell um ein „differenzierbares Chaos“. Der Homogenitätsbegriff überträgt sich in naheliegender Weise. Bezeichnet man etwa mit $T^r \Sigma = \Sigma_r$ die aus Σ durch die Translation $T^r X = X + Y$ entstandene Menge, so besitzt beim homogenen Chaos $\mathfrak{F}(\Sigma)$ die zufällige Größe $S^r \mathfrak{F}(\Sigma) = \mathfrak{F}(T^r \Sigma)$ bei beliebigem festem Vektor Y dieselbe Verteilung. Die S^r bilden eine Abelsche Gruppe, $S^r S^{r'} = S^{r+r'}$, von wahrscheinlichkeitstreu transformierten des Raumes der \mathfrak{F} in sich. — Sei $\Phi(\mathfrak{F})$ ein gewissen allgemeinen Meß- und Integrierbarkeitsbedingungen genügendes Funktional der additiven Mengenfunktion \mathfrak{F} . Verf. beweist dann folgende Verallgemeinerung des Ergodensatzes (in der wahrscheinlichkeitstheoretischen Formulierung von Khintchine):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{V(|Y| < r)} \int \Phi(S^r \mathfrak{F}) dV_r \quad (3)$$

$|Y| < r$

existiert mit der Wahrscheinlichkeit Eins. Der Satz von Birkhoff-Khintchine bezieht sich auf den eindimensionalen Fall. Die Voraussetzung des Verf. ist, daß $|\Phi| \log^+ |\Phi|$ einen endlichen Erwartungswert hat. Die zum Beweise herangezogenen Hilfsmittel, insbesondere der Beweis des „dominated ergodic theorem“, sind dem Ref. unverständlich. Der Umweg schien dem Verf. nötig zu sein, da sich der Beweis für den eindimensionalen Fall nicht direkt übertragen läßt. — Über den Wert von (3) läßt sich in Analogie zum eindimensionalen Fall folgendes aussagen: „Metrische Transitivität“ der Gruppe S^r bedeutet, wenn man konsequent der ergodentheoretischen Terminologie folgt, daß sich der Raum der \mathfrak{F} nicht in zwei S^r -invariante Teile positiver Wahrscheinlichkeit zerlegen läßt. In diesem Falle ist der Limes (3) von \mathfrak{F} unabhängig und gleich dem Erwartungswert von $\Phi(\mathfrak{F})$. — Metrische Transitivität ist erfüllt, wenn das Chaos $\mathfrak{F}(\Sigma)$ räumlich „abklingende Korrelation“ besitzt (entspricht dem Mischungstyp der Ergodentheorie). Dies ist wiederum sicher der Fall, wenn $\mathfrak{F}(\Sigma)$ räumlich „korrelationsfrei“ ist, d. h. wenn $\mathfrak{F}(\Sigma_1), \dots, \mathfrak{F}(\Sigma_k)$ für irgendwelche paarweise fremden Σ_i statistisch unabhängig verteilt sind. — Das wichtigste homogene und korrelationsfreie Chaos ist das „reine Chaos“ $\mathfrak{P}(\Sigma)$ des Verf. Die Verteilung von $x = \mathfrak{P}(\Sigma)$ ist bei festem Σ eine Gaußsche mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{x^2}{2V}}, \quad V = \text{Vol.}(\Sigma).$$

Ref. erblickt eine der Hauptleistungen (teilweise schon etwa 15 Jahre zurückliegend) des Verf. in der effektiven Konstruktion und weitgehenden Erforschung des reinen Chaos. Der eindimensionale Fall ist die mathematische Vervollständigung der Theorie der Brownschen Bewegung von Einstein. Diese Konstruktion führt Verf. durch Abbildung des Raumes der \mathfrak{F} auf das Intervall $0 < \alpha < 1$ aus, wobei Wahrscheinlichkeiten in gewöhnliche Maße in $(0, 1)$ übergehen und die Abbildung im wesentlichen eineindeutig ist. Verf. hat in seiner Arbeit die Darstellung $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\Sigma; \alpha)$, allgemein $\mathfrak{F}(\Sigma; \alpha)$ zum Ausgangspunkt gewählt. — Für eine gewissen allgemeinen Voraussetzungen genügende Funktion $f(X_1, \dots, X_k)$ beweist Verf., daß das Stieltjesintegral

$$z(X) = \int_{R_n} \dots \int_{R_n} f(X - X_1, \dots, X - X_k) dX_1 \mathfrak{P}(\Sigma) \dots dX_k \mathfrak{P}(\Sigma) \quad (4)$$

mit der Wahrscheinlichkeit Eins existiert (§ 8, 9). Die Voraussetzungen über f scheinen dem Ref. jedoch nicht ausreichend zu sein. $z(X)$ ist eine zufällige Größe und

$$\mathfrak{F}(\Sigma) = \int_{\Sigma} z(X) dV_X \quad (4a)$$

ist ein homogenes Chaos. Es hat ferner, wenn f im Unendlichen genügend abklingt, räumlich abklingende Korrelation. Verf. nennt (4), (4a) ein „polynomiales Chaos, homogen vom k -ten Grade“, und eine Summe von solchen, mit l als auftretendem Höchstgrad, schlechthin „polynomiales Chaos vom Grade l “. Dabei wird die Konstante als Chaos (4) nullten Grades eingeführt. — Verf. zeigt in § 12, daß ein beliebiges homogenes Chaos mit abklingender Korrelation $\mathfrak{F}(\Sigma)$ in gewissem Sinne durch eine Folge $\mathfrak{F}_n(\Sigma)$ polynomialer Chaoe schwach approximiert werden kann. § 10 behandelt das Intensitätsspektrum eines polynomialen Chaos. In § 11 wird das „diskrete Chaos“ betrachtet. $F(\Sigma)$ nimmt hier nur die Werte 0, 1, 2, ...

an, und zwar den Wert n mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{n!} V^n e^{-V}, \quad V = \text{Vol. } (\Sigma)$$

(Poissonsche Verteilung). In vielen dieser Betrachtungen wird vom Ergodensatz wesentlich Gebrauch gemacht. *E. Hopf* (Leipzig).

Romanovsky, V. I.: Analytical inequalities and statistical tests. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 4, 457—474 u. engl. Zusammenfassung 474 (1938) [Russisch].

The usual way of treating applicational problems by means of mathematics consists in building a mathematical model of the phenomena under consideration and in deducing various consequences of the simplifying hypotheses that it contains. In this way we arrive, among others, at various formulae and inequalities which are used as statistical tests. — The author indicates the interesting idea of the possibility to follow the other way round. He considers the classical inequalities, such as those of Cauchy, Hölder, Minkowski and Ingham, and tries to see how and to what purpose they can be used in statistics. For example, writing the inequality of Cauchy in the form $(\sum a_i b_i)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2$ he notices that, by a proper interpretation of the a 's and the b 's, the ratio $r = \sum a_i b_i / (\sum a_i^2 \sum b_i^2)^{\frac{1}{2}}$ represents the classical coefficient of correlation. The theory of the inequality of Cauchy indicates that the validity of r is limited to cases of linearity of regression. — But this is not the only way in which the inequality of Cauchy may be used. Also a_i and b_i may be interpreted as frequencies of an event A and of its negation \bar{A} in the presence of another event B_i . With this interpretation the same ratio r becomes a measure of dependence of A on the set of factors B . It is equal to unity only if A is independent of any B_i taken separately and it is equal to zero only when the occurrence or non-occurrence of A is perfectly determined by those of any of the B 's. *J. Neyman* (Berkeley, Cal.).

● **Wold, Herman:** A study in the analysis of stationary time series. Uppsala: 1938. VIII, 214 pag. a. 19 fig.

This book will be welcomed by both the mathematicians and by practical statisticians. Apart from new theoretical results the former will enjoy the description of practical problems of the time series analysis, which form a sound source of theoretical conceptions of the most modern branch of the theory of probability, which cannot fail to become an everyday tool of his own work. — The book is a result of a considerable amount of work carried on in contact with H. Cramer and inspired by the previous writings of G. U. Yule on one side and of A. Khintchine and Kolmogoroff on the other. — After a short introduction, concerned mainly with basic definitions of the theory of probability, the author goes on to describe some of the current methods of time series analysis. Starting with primitive schemes, treating a time series as a sequence of values of a periodic or of an almost periodic function, the author proceeds to more elaborate schemes, finishing with the one suggested by Yule, described as the scheme of linear regression in which the connection between successive terms of the series has a purely probabilistic character. Chapter II discusses in some detail the conception of the discrete stationary random process as defined by Khintchine. This and the next chapter III, on the theory of some special stationary processes, are the main chapters in the book. — General definitions and theorems concerning the convergence of the random processes in probability are followed by the discussion of several particular classes of the random processes, linearly singular, purely random, the process of moving averages, the general process of linear regression, the process of linear antiregression, the periodic process, the process of hidden periodicities and others. Among several interesting theorems we may mention the following: Any discrete stationary process with finite dispersion may be represented by a sum of two uncorrelated components $\{\psi(t)\}$ and $\{\xi(t)\}$, of which the first is singular and the other is connected with a third non-autocorrelated process $\{\eta(t)\}$ by the formula $\{\zeta(t)\} = \{\eta(t)\} + b_1\{\eta(t-1)\} + \dots$, where the b 's are real numbers such that $\sum b_n^2$ is con-

vergent. Chapter IV is given to applications. The book ends by two appendices on the w^2 test for goodness of fit and on the quantitative significance of the correlation coefficient. The author calls attention to the very important and untouched problem of testing hypotheses concerning the structure of the time series which may be met in practice.

J. Neyman (Berkeley, Cal.).

Gulotta, B.: Sulla legge di probabilità della differenza tra la media empirica e il valor medio teorico dei quadrati d'una variabile casuale che segue la legge normale. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **9**, 245—251 (1938).

The author deduces the known probability law of what is commonly denoted by χ^2 , the sum of squares of n independent normal variates all varying about zero with the same S. D.

J. Neyman (Berkeley, Cal.).

Hoel, Paul G.: On the chi-square distribution for small samples. *Ann. math. Statist.* **9**, 158—165 (1938).

The author considers the characteristic function of the multinomial distribution $P = n! \prod_{i=1}^{k+1} p_i^{x_i} / \prod_{i=1}^{k+1} x_i!$. After having normalized it putting $x_i = (\alpha_i - np_i)/\sqrt{n}$ he obtains an expansion in negative powers of \sqrt{n} and retains the first three terms. This allows him to get an approximate expression for the joint distribution of the x_1, \dots, x_n while $x_{k+1} = -\sum_{i=1}^k x_i$. The next step is to use the previous result to obtain an approximate expression for the characteristic function of $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k+1} x_i^2/p_i$ which is finally used to calculate the correction terms for the usual probability integral of χ^2 . *Neyman*.

Fisher, R. A.: The statistical utilization of multiple measurements. *Ann. of Eugen.* **8**, 376—386 (1938).

This paper continues the study of linear discriminant functions dealt with by the author previously [*Ann. of Eugen.* **7**, 240—250 (1936)]. The analogy between such discriminant functions and the linear regression equations is further explained and it is shown that the test of significance suggested by the analysis of variance is valid, this being accomplished by reference to results obtained by Hotelling (see this *Zbl.* **4**, 265). It is noted that the extent to which two sets of multiple measurements differ is related to the concept of generalized distance in fields of multiple variates discussed by Mahalanobis (see this *Zbl.* **15**, 33) and it is observed that appropriate tests of significance exist for Mahalanobis' measure of this quantity. Finally when three or more sets of multiple measurements are given, the author develops a test of the hypothesis that the populations specify vectors collinear or coplanar. Finally if two sets of multiple measurements are given, it is shown how to test whether or not the vector determined by the comparison between them differs significantly in direction from that of a hypothetical vector. *C. C. Craig*.

Wilks, S. S.: Shortest average confidence intervals from large samples. *Ann. math. Statist.* **9**, 166—175 (1938).

Given a sample of n from a population governed by a cumulative distribution function (c. d. f.) which involves a single parameter ϑ , the author shows that ψ_0 which is the log. of the likelihood of the sample divided by its standard deviation, valued at $\vartheta = \vartheta_0$, the true value of ϑ in the population, obeys a c. d. f. which approaches normality for large samples, under appropriate conditions. It is noted that a like theorem holds if the population c. d. f. involves several parameters. It is further shown that for large samples, in the neighborhood of $\vartheta = \vartheta_0$ the rate of change of ψ_0 with respect to ϑ is on the average greater than that for any other member of a class of functions which have the same asymptotic c. d. f. Thus ψ_0 can be used to determine fiducial limits for ϑ which are on the average closer together than those determined by any other member of this class. The use of ψ_0 to determine fiducial limits for ϑ is given three numerical illustrations.

C. C. Craig (Ann Arbor).

Kenney, J. F.: A note on certain formulas used in sampling theory. *Amer. Math. Monthly* 45, 456—458 (1938).

The usual formula for the standard error of the difference between the means of paired items was incorrectly printed in an article of C. N. Mills (*Amer. Math. Monthly* 1937, 491). This suggests the author to make a note about the variable parameter t in the sampling theory which is distributed in accord with the "Student" curve. It seems to the author that an inappropriate formula is given in certain textbooks. For two independent samples consisting of N_1 and N_2 variates, respectively, the value of the variable t tends toward the $t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) : (s_1^2/N_2 + s_2^2/N_1)^{1/2}$, when N_1 and N_2 become large. The procedure of referring this value of t to a normal probability scale would not be invalid to any appreciable extent for large values of N_1 and N_2 . But the procedure commonly given in textbooks for testing a null hypothesis that two samples are from the same universe, using their means as a criterion of judgment, is to refer $t = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) : (s_1/N_1 + s_2/N_2)^{1/2}$ to a normal probability scale. A further observation is made if one of the samples becomes infinitely large, and to the rule for the level of significance. Janko (Praha).

Starkey, Daisy M.: A test of the significance of the difference between means of samples from two normal populations without assuming equal variances. *Ann. math. Statist.* 9, 201—213 (1938).

Starting with the assumptions that two sets of independent random variables follow normal distributions with unknown means α and β and with unknown standard deviations, the author deduces what is called the "fiducial distribution" of the difference $\alpha - \beta$. This is a contribution to the controversy, the participants of which are: W. V. Behrens [*Landwirtsch. Jb.* 68 (1929)], R. A. Fisher [*Ann. Eugenics* 6 (1935) and *ibid.* 7 (1937)], M. S. Bartlett [*Proc. Cambridge Philos. Soc.* 32 (1936); this *Zbl.* 15, 361] and B. L. Welch [*Biometrika* 29 (1938); this *Zbl.* 18, 226]. Since the authors neglect to give a general definition of the term "fiducial distribution", some of their arguments are difficult to follow. J. Neyman (Berkeley, Cal.).

Norris, Nilan: Some efficient measures of relative dispersion. *Ann. math. Statist.* 9, 214—220 (1938).

The purpose of the paper is to give what is called "efficient statistics" for the estimation of the relative variability of populations following a law which is not normal. The term "efficient statistics" is used to denote a function of the observed values of the random variables, which (a) tends to be normally distributed when the number of observations is increased and (b) which has the minimum asymptotic value of the variance. The author considers two distributions $f_1(x) = x^p e^{-x/a} / a^{p+1} \Gamma(p+1)$ and $f_2(x) = (a/x)^{p+2} e^{-a/x} / a \Gamma(p+1)$ and finds that, for a fixed set of observations x_1, x_2, \dots, x_n , the values of a and p which maximize the likelihood $L = \log \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ depend, in the first case, on the arithmetic mean, A , and on the geometric mean, G , of the x 's, and in the second on G and on the harmonic mean, H . The author presumes that the ratios of those means, say $u = \frac{A}{G}$ and $v = \frac{H}{G}$ represent the efficient statistics with which to estimate the relative variability of the populations following the laws f_1 and f_2 . He also gives formulae to calculate approximate values of the variances of u and v . It may be remarked that the results of the author and the methods used to obtain them require justification and a reference to the results of J. L. Doob [*Trans. Amer. Math. Soc.* 36 (1934); this *Zbl.* 10, 173]. The same methods applied to the coefficient of variation in the case of normality give wrong results: a finite instead of the infinite value of the variance. J. Neyman (Berkeley, Cal.).

Yates, F.: Orthogonal functions and tests of significance in the analysis of variance. *J. Roy. Statist. Soc.* 5, Suppl., 177—180 (1938).

Kolmogoroff, A.: Zur Lösung einer biologischen Aufgabe. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 1—6 (1938).

In einer Bevölkerung seien M -Wesen vorhanden mit der Eigenschaft, daß jedes M -Wesen der $n + 1$ -ten Generation G_{n+1} von einem bestimmten M -Wesen aus G_n stammt; p_k sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein M -Wesen aus G_n genau k M -Wesen in G_{n+1} erzeugt. K_0 sei die Wahrscheinlichkeit der M -Wesen in G_0 . Die Arbeit untersucht die Wahrscheinlichkeit $P_0^{(n)}$ dafür, daß in G_n keine M -Wesen mehr vorhanden sind.

Sind die Momente $a = \sum_1^\infty k p_k$ und $b = \sum_1^\infty k(k-1)p_k$ endlich, so wird $P_0 = \lim P_0^{(n)} = 1$, wenn $a < 1$ oder $a = 1$, $b > 0$ ist, dagegen $P_0 < 1$, wenn $a > 1$ ist. Setzt man $q(x) = \sum_0^\infty p_k x^k$, so wird nämlich $P_0 = \lambda^{K_0}$, wo λ die kleinste positive Wurzel der Gleichung $q(\lambda) - \lambda = 0$ ist. Das asymptotische Verhalten wird durch $1 - P_0^{(n)} \sim \text{konst. } K_0 a^n$, falls $a < 1$, und $1 - P_0^{(n)} \sim \frac{2K_0}{nb}$, falls $a = 1$, $b > 0$ ist, gekennzeichnet. Ist schließlich $a - 1 > 0$, aber klein im Verhältnis zu b , so wird $1 - P_0$ annähernd gleich $\frac{2K_0}{b}(a - 1)$.

Harald Geppert (Gießen).

Physikalische Statistik:

● Tolman, Richard C.: The principles of statistical mechanics. Oxford: Clarendon press 1938. XIX, 660 S. bound 40/-.

„Das Buch soll keine Umarbeitung oder Neuauflage von des Verf. Buch ‚Statistische Mechanik mit Anwendungen auf Physik und Chemie‘ sein, das zu einer Zeit geschrieben wurde, als die neue Quantentheorie entstand. Der Verf. will eine Darstellung der Prinzipien der statistischen Mechanik geben und die Hypothesen klarmachen, die man im Fall der klassischen und im Fall der Quantenmechanik hinzunehmen muß, um eine Beschreibung mechanischer Systeme in Zuständen zu geben, die weniger genau bekannt sind, als es theoretisch möglich wäre. Das Buch soll für den modernen Standpunkt das leisten, was Gibbs in seinem Buch ‚Elementare Prinzipien der Statistischen Mechanik‘ für die klassische Mechanik geleistet hat. Anwendungen auf physikalisch-chemische Systeme werden nur als Erläuterung zu den Prinzipien und zu ihren Anwendungsmethoden gegeben.“ Inhalt: Teil I (180 S.): Klassische statistische Mechanik. Einleitung. Die Elemente der klassischen Mechanik. (Vom Hamiltonprinzip aus werden die Lagrangegleichungen und die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen entwickelt. Energie-, Impuls- und Drehimpulssatz, kanonische Transformationen, allgemeine Integrationstheorie.) Statistische Gesamtheiten in der klassischen Mechanik. (Einführung statistischer Methoden. Satz von Liouville. Bedingungen statistischen Gleichgewichts. Die Hypothese gleicher a priori-Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen klassischen Zustände wird als plausible, aber an den empirischen Ergebnissen zu prüfende Annahme eingeführt. Ergodenhypothese.) Das Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsgesetz. (Anwendung der klassischen Statistik auf Systeme im Gleichgewicht in der Weise, daß von einer Gesamtheit von Systemen im Gleichgewicht ausgegangen wird, die praktisch die gleiche Energie haben, und die der Hypothese gleicher a priori-Wahrscheinlichkeit gemäß gewählt sind. Für schwache Wechselwirkung zwischen den Teilchen kommt das Maxwell-Boltzmannsche Gesetz heraus. Bedeutung und Anwendungen des Gesetzes.) Stöße als Mechanismus zeitlicher Veränderung. (Prinzip der zeitlichen Umkehrbarkeit dynamischer Vorgänge. Klassifikation von Molekülzuständen, Anordnungen und Zusammenstößen. Wahrscheinlichkeit eines Stoßes und der dazu inversen.) Boltzmanns H -Theorem. (Aus den Betrachtungen des vorigen Kapitels über Stöße wird das H -Theorem abgeleitet. Schwankungen um das Gleichgewicht. Prinzip des Gleichgewichts im einzelnen.) Teil II: Quantenstatistik. (240 S.) Die Elemente der Quantenmechanik. (Eine recht vollständige Darstellung der Grund-

lagen der nichtrelativistischen Quantenmechanik, einschließlich der Transformationstheorie.) Einige einfache Anwendungen der Quantenmechanik. (Einzelnes Teilchen in verschiedenen Kraftfeldern, zwei Teilchen mit Wechselwirkung, Teilchen mit Spin, Systeme von gleichen Teilchen.) Statistische Gesamtheiten in der Quantenmechanik. (Statistische Gesamtheiten von einander gleichen Systemen, die über verschiedene Quantenzustände verteilt sind. Dichtematrix. Quantenmechanischer Liouvillescher Satz. Bedingungen statistischen Gleichgewichts. Die Hypothesen der gleichen a priori-Wahrscheinlichkeit und der a priori zufälligen Phasenverteilung der quantenmechanischen Zustände eines Systems. Beziehung zur entsprechenden klassischen Annahme. Anwendbarkeit statistischer Quantenmechanik. Ergodenhypothese.) Die Verteilungsgesetze von Maxwell-Boltzmann, Einstein-Bose, Fermi-Dirac. (Systeme im Gleichgewicht, Behandlung wie im klassischen Fall. Andeutung der Anwendungen dieser Statistiken.) Zeitliche Veränderung quantenmechanischer Systeme. (Prinzip der dynamischen Umkehrbarkeit. Die Methode der Variation der Konstanten und der unitären Transformationen. Systeme mit veränderlichen äußeren Parametern. Messungen und Aussagen, die über ein zeitlich veränderliches quantenmechanisches System gemacht werden können. Übergänge in quantenmechanischen Systemen, speziell in einem Gas als Folge der Zusammenstöße. Zeitliche Veränderungen in Systemgesamtheiten.) Das quantenmechanische H -Theorem. (Ableitung des Theorems. Mikrokanonische und kanonische Gesamtheiten. Beispiele von Gleichgewichten.) Teil III: Statistische Mechanik und Thermodynamik. (125 S.) Statistische Deutung der Prinzipien der Thermodynamik. (Die Größen der statistischen Mechanik, welche den makroskopischen Größen der Thermodynamik entsprechen. Die Beziehungen der statistischen Mechanik, welche den ersten beiden Hauptsätzen der Thermodynamik entsprechen.) Weitere Anwendungen auf die Thermodynamik. (Zustandssumme. Eigenschaften von Gasen, Kristallen, Lösungen. Dampfdruck, chemisches Gleichgewicht. Der dritte Hauptsatz der Thermodynamik. Makrokanonische Gesamtheiten. Schwankungen in statistischen Gesamtheiten.) — Die zugrunde liegenden Annahmen und die physikalischen und mathematischen Methoden der statistischen Mechanik werden ausführlich erläutert. Das Buch ist klar geschrieben und ohne viel Mühe auch für Studenten in höheren Semestern lesbar.

Bechert (Gießen).

● **Donder, Th. de: Théorie nouvelle de la mécanique statistique. (La Chim. math. Centre de recherche fondé par Th. de Donder. Vol. 1.)** Paris: Gauthier-Villars & Cie. 1938. 83 pag. Frs. 40.—.

Das Buch heißt nach des Verf. Vorwort „Neue Theorie der statistischen Mechanik“, weil die Definitionen und Prinzipien mit Hilfe von Differentialquotienten nach dem Phasenvolumen dargestellt werden. Dabei wird unter anderem eine Entropie pro Teilchen definiert. Inhalt: Grundlegende Sätze der allgemeinen statistischen Mechanik. Energie und Entropie makroskopischer Systeme. Die thermodynamische Grundgleichung von Gibbs. Gequantelte Systeme. Dynamik von materiellen Systemen. Das Elektronengas. Einige spezielle statistische Mechaniken. — Dem Ref. will scheinen, daß von statistischer Mechanik im eigentlichen Sinn kaum gesprochen werden kann, wenn die Entwicklung der Theorie von thermodynamischen Begriffen wie Entropie und Temperatur ausgeht.

Bechert (Gießen).

Ferber, Martin: Méthode d'étude de séries statistiques du type exponentiel. Application à la radioactivité. J. Phys. Radium, VII. s. 9, 337—344 (1938).

Statt der üblichen Auswertung von statistischen Reihen, wie sie beim Zerfall langlebiger radioaktiver Substanzen auftreten (Verteilungsgesetz für die Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen bzw. Vergleich mit der Poissonverteilung), werden Intervalle betrachtet, die gleiche Zahlen N von Intervallen zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen enthalten. An der Wahrscheinlichkeit, daß eines von diesen N Intervallen eine Länge zwischen x und $x + dx$ hat und daß es bei Anordnung dieser N Intervalle nach abnehmender Größe die Ordnungsnummer j erhält,

werden die Korrelationsverhältnisse zwischen x und j untersucht. Vergleich mit Messungen der α -Emission des Poloniums; die Abweichungen liegen im Bereich der statistischen Schwankungen.
J. Meixner (Gießen).

Geometrie.

Allgemeines

Bilimovitch, Anton: Sur les recherches intrinsèques en géométrie et mécanique. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 4, 169—175 (1938).

Thébault, V.: Sur l'isopôle. Mathesis 52, 236—238 (1938).

Im Anschluß an seine frühere Note [Mathesis 49, 270 (1935)] entwickelt Verf. einige weitere Sätze über diesbezügliche Fragestellungen der elementaren Dreiecksgeometrie.
Steck (München).

Goormaghtigh, R.: Sur des groupes de points appartenant aux hauteurs d'un triangle ou d'un tétraèdre orthocentrique. Mathesis 52, 225—231 (1938).

Verf. verallgemeinert einige Ergebnisse von Thébault (s. vorst. Ref.) aus der elementaren Dreiecksgeometrie und leitet eine weitere Aussage für das Tetraeder her.
Steck (München).

Horn, C. E. van: The Simson quartic of a triangle. Amer. Math. Monthly 45, 434—437 (1938).

By the Simson quartic is meant the three-cusped hypocycloide which is the envelope of the Simson lines of the triangle. Construction of the cuspidal tangents. The quartic touches each of the sides of the triangle at the symmetric of the foot of the altitude on that side relative to its midpoint. The altitudes touch the quartic, each altitude touching at a point whose distance from its foot is twice the projection on it of the circumradius to the vertex through which the altitude is drawn.
Bottema.

Musselman, J. R.: On the line of images. Amer. Math. Monthly 45, 421—430 (1938).

If we take any point T on the circumcircle of a triangle $A_1A_2A_3$ and reflect the point in the sides of the triangle we obtain three points lying on a line — the line of images of T . The author uses an analytical method, representing the points of the plane by complex numbers. The line of images of any point passes through the orthocentre. For every point R on the line of images of T , if we determine the images R_1, R_2, R_3 , the three circles $R_1R_2A_3$ etc. intersect at T . If any transversal be drawn through the circumcentre, cutting the sides in C_i , one point of intersection of the three circles on A_iC_i as diameters is the center of the aequilateral hyperbola which is the isogonal conjugate of the transversal; the second point of intersection is the point on the circumcircle whose line of images is tangent to the hyperbola at the orthocenter. The Droz-Farny theorem. The line of images for the point of Miquel. Some special cases.
O. Bottema (Deventer, Holl.).

● Graf, Ulrich: Trigonometrie der Ebene. Sphärische Geometrie und Kartenentwürfe. (Hochschulwiss. in Einzeldarstell.) Leipzig: Quelle & Meyer 1938. 191 S. u. 129 Abb. RM. 3.20.

Das Buch ist eine erste Einführung in die genannten Disziplinen, nicht allein für Mathematiker bestimmt, sondern auch für Geodäten und Geographen. Besonders hervorzuheben ist das Nebeneinander von zeichnerischer und rechnerischer Behandlungsweise der Grundaufgaben der sphärischen Geometrie mit dem Ziel, die Eigenheiten der Kugelgeometrie klar herauszuarbeiten. Dieses Ziel wird durchaus erreicht.
Grunwald (Göttingen).

Scheffers, Georg: Das elliptische Kugelbild in der Perspektive. S.-B. Berlin. math. Ges. 37, 5—8 (1938)

Ableitung eines kennzeichnenden Merkmals für den elliptischen Zentralumriß einer Kugel, das zur Prüfung von derartigen Kugelbildern gut verwendbar ist.

J. L. Krames (Graz).

Arvesen, Ole Peder: Zur axonometrischen Methode von L. Eckhart. *Norske Vid. Selsk., Forh.* 11, 72—74 (1938).

Es seien zwei Bilder N_1, N_2 eines Objektes in senkrechten Projektionen gegeben. Durch die Punkte von N_1 zieht man parallele Strahlen von beliebiger Richtung R_1 und ebenso durch die entsprechenden Punkte von N_2 parallele Strahlen einer Richtung R_2 . Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der beiden Parallelstrahlenbüschel geben ein drittes Bild B des Objektes, und zwar i. a. einen Schrägriß. Sind N_1, N_2 zugeordnete Normalrisse im Sinne von Monge, so ist B eine Parallelprojektion auf die Mittelebene des zweiten und vierten Quadranten. Als Sonderfall ergibt sich der Satz: In einer Mongeschen Abbildung eines Objektes sind die Halbierungspunkte der Abstände zugeordneter Grund- und Aufrißpunkte die Punkte einer neuen Orthogonalprojektion des Objektes auf die Mittelebene des zweiten und vierten Quadranten.

Haenzel (Karlsruhe).

Arvesen, Ole Peder: Weiteres über L. Eckharts axonometrische Methode. *Norske Vid. Selsk., Forh.* 11, 78—81 (1938).

Während in der vorstehenden Abhandlung das von Eckhart als Einschnneiden bezeichnete Verfahren besprochen wurde, das aus zwei Normalrissen eines Objektes in einfacher Weise einen Schrägriß herstellt, behandelt der Verf. jetzt eine Umkehrung dieses Verfahrens, das sogenannte Ausrichten.

Haenzel (Karlsruhe).

Lebesgue, Henri: Sur les subdivisions des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers. *Publ. Math. Univ. Belgrade* 6/7, 183—188 (1938).

Teilt man die Kanten eines Würfels, Oktaeders oder Tetraeders in gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte Ebenen, die zu den Polyederflächen parallel sind, so hat man den Würfel in Würfel, das Oktaeder und das Tetraeder je in Oktaeder und Tetraeder geteilt. Verf. zeigt, daß dies die einzigen Möglichkeiten sind, ein reguläres Polyeder in reguläre Polyeder zu zerteilen.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Fournier, Georges: La division régulière de l'espace et la structure de la matière. *J. Phys. Radium, VII. s. 9*, 360—376 (1938).

Das in der Kristallographie hinlänglich bekannte Problem der Ausfüllung des R^3 mit regulären, konvexen Polyedern wird sehr ausführlich dargestellt. Besonders eingehend wird die „Pflasterung“ mit Oktaedern + Tetraedern besprochen, da sie zusammen mit der Würfelausfüllung die einzig möglichen sind.

W. Nowacki.

Tertsch, H.: Graphische Darstellung der Möglichkeiten von Deckachsenkombinationen. *Z. Kristallogr. A* 100, 85—90 (1938).

Es wird die Frage, auf wie viele und welche verschiedene Arten man kristallographisch mögliche Drehungsachsen (Zähligkeit = 1, 2, 3, 4 und 6) kombinieren kann (Punktgruppen erster Art), auf Grund von anschaulichen Überlegungen an der stereographischen Projektion gelöst.

W. Nowacki (Bern).

Graffi, Dario: Un teorema di calcolo vettoriale. *Boll. Un. Mat. Ital.* 17, 233—234 (1938).

Notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein gewisser Vektor aus einem Potential ableitbar sei.

Autoreferat.

Mühlendyck, O.: Neuer Beitrag zur Theorie der regulären Somenkongruenzen. *S.-B. Berlin. math. Ges.* 37, 9—21 (1938).

Im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. werden hier zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten von Somen untersucht. Ein Soma wird hierbei im Sinne von Studys „Geometrie der Dynamen“ durch duale Biquaternionen dargestellt. Es werden dann reguläre Somenkongruenzen untersucht, d. h. von 2 Parametern abhängende Mannigfaltigkeiten von Somen, die sich nicht in reine Schiebungssomen zerlegen lassen, und die differentialgeometrischen Eigenschaften dieser Kongruenzen betrachtet. Vom gegebenen Soma kommt man durch die Schraubungen eines Gewindebüschels zu allen benachbarten Somen, was dazu führt, jedem Soma ein begleitendes Zylindroid zuzuord-

nen. Es lassen sich dann sogenannte Normalschnitte in Analogie zu den Flächen im R_3 betrachten und hiernach die einzelnen Stellen in 3 Arten einteilen. Weiterhin werden sogenannte geodätische Krümmungen der Normalschnitte eingeführt und die Umgebungen der verschiedenen Arten durch Invarianten kinematisch gekennzeichnet.

Bureau (Hamburg).

● Cartan, Élie: *Leçons sur la théorie des spineurs. I. Les spineurs de l'espace à trois dimensions.* (Actualités scient. et industr. Nr. 643. Exposés de géométrie. Publiés par E. Cartan. IX.) Paris: Hermann & Cie. 1938. 98 pag. Frs. 25.—.

Kapitel I. Drehungen und Spiegelungen in euklidischen und pseudo-euklidischen Räumen. Sätze über p -Vektoren. — Kapitel II. Tensoren (die Tensoren werden definiert mittels einer Darstellung der Rotationsgruppe). Gleichwertige Darstellungen. Reduzible Darstellungen. Orthogonale, unitäre und hermitesche Matrizen. Reduzibilität der p -Vektor-Transformation für $n = 2p$. — Kapitel III. Spinoren in E_3 [ein Nullvektor x^h bestimmt einen Spinvektor ξ_0, ξ_1 , durch die Formeln $x^1 = \xi_0^2 - \xi_1^2$; $x^2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2)$; $x^3 = -2\xi_0\xi_1$]. Transformation eines Spinors. Die einem Vektor (bzw. Bivektor und Trivektor) entsprechende Matrix im Spinraum. Das Produkt zweier Spinoren bestimmt einen Vektor. Konjugierte Spinoren. — Kapitel IV. Die Transformation der Produkte $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ ($\alpha + \beta = p$) ist eine Darstellung $D_{\frac{p}{2}}$ der Rotations-

gruppe. Das Produkt $D_i \times D_j$ ist reduzibel. Der Fall, daß p gerade ist. Die Bestimmung der linearen Darstellungen der Drehungsgruppe. Jede Darstellung ist vollständig reduzibel. Die Darstellungen der Gruppe der Drehungen und Spiegelungen und der Gruppe der unimodulären unitären Transformationen in E_2 . J. Haantjes.

Sibata, Takasi: *Spinor calculus.* J. Sci. Hiroshima Univ. A 8, 169—186 (1938).

Genügen die Matrizen γ_{AB}^i ($h, i, \dots = 1, \dots, 4$) der Gleichung $\gamma_i(\gamma_j) = g_{ij}$, so gibt es einen hermiteschen Tensor ω_{AB} und einen Bivektor C_{AB} für die

$$\omega \gamma_i = \bar{\gamma}_i \bar{\omega}; \quad \gamma_i = -C \gamma_i C^{-1}$$

ist. Einem Spinvektor ψ^A entsprechen nun folgende reelle skalare Vektoren und Affinoren:

$$M = \bar{\psi} \omega \psi; \quad N = \bar{\psi} \omega \gamma_5 \psi; \quad u^h = \bar{\psi} \omega \gamma^h \psi; \quad w^h = i \bar{\psi} \omega \gamma^h \gamma_5 \psi; \\ u^{ij} = i \bar{\psi} \omega \gamma^{[i} \gamma^{j]} \psi; \quad \varrho_i = \psi C \gamma_i \psi; \quad \varrho_{ij} = \psi C \gamma_{[i} \gamma_{j]} \psi.$$

Verf. gibt die Beziehungen an, welche zwischen diesen Affinoren bestehen. Überdies wird angegeben, durch welche Affinoren ψ^A bestimmt ist. J. Haantjes (Amsterdam).

Bagehi, Haridas: *Vector theory of affine transformations.* Bull. Calcutta Math. Soc. 30, 45—72 (1938).

Verf. untersucht die affinen Transformationen des R_3 im Sinne Hamiltons mit Hilfe der Quaternionensymbolik und löst hiermit einige z. T. bekannte Einzelfragen. Auf die Frage, wann 3 orthogonale Vektoren wieder in solche übergehen, ergibt sich das Resultat, daß die Vektoren hierbei parallel der Hauptdilationsrichtungen der Transformation sein müssen. Weiterhin werden dann die affinen Transformationen angegeben, die 2 gegebene Quadriken ineinander überführen, sowie die Aufgabe gelöst: alle Affinitäten anzugeben, deren n -te Potenz eine Quadrik in sich überführt. Bureau.

Jardetzky, W.: *Remarques sur les liaisons entre certaines représentations géométriques.* Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 197—203 (1938).

Zu partiellen Differentialgleichungen werden geometrische Deutungen mit Hilfe von Vektorfeldern p in mehrdimensionalen Räumen angegeben. Aus gewissen Eigenschaften der Gleichungen und der Lösungen folgen dann Aussagen über den Tensor $\text{rot } p$.

Landherr (Rostock).

Menger, Karl: *Nouvelle base pour le développement de la géométrie de Bolyai et Lobatchefski.* C. R. Acad. Sci., Paris 207, 458—460 (1938).

For the Bolyai-Lobachevskian plane, parallelism of lines, order of points on a

line, convergence of a sequence of points toward one point, and congruence of point-pairs are defined in terms of the notions of joining and intersecting. Consequently it is possible to base the Bolyai-Lobachevskian geometry on a system of axioms using joining and intersecting as the only undefined relations. *J. L. Dorroh.*

● **Blaschke, Wilhelm: Ebene Kinematik. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 25.)** Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1938. 56 S. u. 19 Abb. RM. 4.—

Die Vorlesung behandelt in ihrem ersten, algebraischen Teile die gleichzeitig vom Verf. und J. Grünwald 1911 gefundene kinematische Abbildung, welche den Geraden g des Raumes die geordneten Punktepaare (l, r) der Ebene derart zuordnet, daß sich schneidende Geraden g, g' des Raumes und Punktepaare $(l, r), (l', r')$ mit gleicher Entfernung der Punkte $(l, l'), (r, r')$ entsprechen. Dabei werden die Punkte des Raumes auf die Euklidischen Bewegungen, die Ebenen auf Umlegungen abgebildet. Der Raum selbst aber erhält durch die Abbildung die Struktur eines quasielliptischen Raumes, dessen absolutes Gebilde in ein Paar konjugiert-komplexer Ebenen zerfallen ist, auf deren Schnittgeraden zwei konjugiert-komplexe Punkte liegen. Die Abbildung wird synthetisch und analytisch, insbesondere auch unter Verwendung der Quaternionenrechnung behandelt. Es folgt die Untersuchung der Invarianten der quasielliptischen Geometrie (Quasiabstand zweier Geraden) und die Einführung eines kinematischen Äquivalenzbegriffs, der durch Übertragung aus dem der quasielliptischen Geometrie folgt. — Der zweite, differentialgeometrische Teil beginnt mit der Theorie der Kurven im quasielliptischen Raume. Die Ableitungsgleichungen zeigen, daß eine Kurve durch Quasikrümmung und Quasiwindung bis auf Quasibewegungen eindeutig bestimmt ist. Diesen Kurven entsprechen in der Ebene eingliedrige Bewegungsvorgänge, und es findet sich auf diesem Wege z. B. das Ergebnis von Chasles, nach dem ein solcher Bewegungsvorgang durch gleitungsloses Abrollen der „beweglichen Polbahn“ B auf der „festen Polbahn“ B' erzeugt werden kann. Die Übertragung der Kurventangente liefert den augenblicklichen Drehpol. Auch die Flächentheorie des quasielliptischen Raumes beginnt mit der Aufstellung von Ableitungsgleichungen. Dazu wird die Stützfunktion $F(\lambda, \mu)$ der Fläche eingeführt. $F(\lambda, \mu)$ bezeichnet den Quasiabstand der Tangente im Punkte (λ, μ) an die Kurve $\lambda = \text{const}$ von einer ein für allemal festgehaltenen Achse A . Die Berechnung der Differentialinvarianten der Fläche aus der Stützfunktion zeigt, daß eine Fläche im wesentlichen durch zwei Invarianten gegenüber quasielliptischen Bewegungen charakterisiert wird. Die Definition einer Quasinormale gestattet die Einführung von Quasikrümmungslinien. Die Berechnung der Krümmung der Flächenkurven führt mit einer Formel für die Quasikrümmung der Quasigeodätischen auf ein Gegenstück zu einer Formel von Euler und auf ein Gegenstück zu der Formel von Meusnier. Zwei Flächen, für die die Differenz der zugehörigen Stützfunktionen konstant ist, heißen quasiparallel. Den Flächen des quasielliptischen Raumes entsprechen zweigliedrige Bewegungsvorgänge in der Ebene. Die Abbildung der Flächentangenten liefert den Satz: Die Drehpole $l(\lambda, \mu; \mu'), r(\lambda, \mu; \mu')$, die zu festen λ, μ gehören, beschreiben zwei längentreu aufeinander bezogene Geraden $H(\lambda, \mu), H'(\lambda, \mu)$. Die Zuordnung $H \rightarrow H'$ ist dichtgetreu. Zu einer vorgeschriebenen Zuordnung dieser Art gehört immer eine Schar paralleler Flächen im quasielliptischen Raume. Eine besondere Art zweigliedriger Bewegungsvorgänge liefert die Abbildung der Quasischiebflächen mit Schmiegtangentenlinien a 's Schiebkurven. Der Verf. regt an, der bekannten Lieschen Fragestellung entsprechend, auch in der quasielliptischen Geometrie die Theorie der Flächen zu entwickeln, die sich auf mehrere wesentlich verschiedene Weisen als Schiebflächen auffassen lassen, und die Ergebnisse kinematisch zu deuten. Der Schlußparagraph bringt Beispiele von Gelenkwerken. — Diese Inhaltsangabe gibt nur das Gerüst des Aufbaus. Im allgemeinen folgt einem Paragraphen ein Anhang mit anschaulichen Beispielen, Aufgaben, Hinweisen auf verwandte Fragestellungen (z. B. der Integralgeometrie) und einschlägige Literatur.

E. A. Weiss (Bonn).

Blaschke, Wilhelm: *Integrale in der Kinematik.* Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 86—88 (1938).

Steiner hat 1838 eine Arbeit veröffentlicht: „Von dem Krümmungsschwerpunkt ebener Kurven“ (J. reine angew. Math. 21). Manche der darin enthaltenen Gedanken scheinen dem Verf. Verallgemeinerungen und Übertragungen fähig. Er setzt das auseinander an einem Beispiel über Bewegungsvorgänge mit drei Freiheitsgraden im Raum.

O. Bottema (Deventer, Holl.).

Analytische und algebraische Geometrie:

Wajnsztein, D.: *Contribution à la généralisation du théorème de Pascal par Möbius.* Wiadom. mat. 46, 117—123 u. deutsch. Zusammenfassung 123 (1939) [Polnisch].

Im Anschluß an Möbius (Ges. Werke 1, 589) und die Arbeiten von Brasinne [Nouv. Ann. Math. (3) 1, 318] und Sperera [Arch. Math. Phys. (2) 1, 333] wird gezeigt, daß ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Acht- bzw. Zehneck, deren Gegenseiten sich in Punkten einer festen Geraden treffen, ein neues Acht- bzw. Zehneck bestimmen, die wieder einem Kegelschnitt einbeschrieben sind und dieselbe Eigenschaft der Schnittpunkte ihrer Gegenseiten besitzen.

Steck (München).

Tolotti, C.: *Equilibrio dei solidi e trasformazioni affini.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 13 (1938).

Nach einem Ergebnis von R. Sauer (dies. Zbl. 10, 76) läßt sich jeder projektiven Abbildung des Raumes eine projektive Kräftetransformation zuordnen, bei der sich die Wirkungslinien der Kräfte projektiv abbilden und jedes Gleichgewichtssystem wieder in ein Gleichgewichtssystem übergeht. Verf. zeigt, wie dieser Satz bei Spezialisierung der projektiven zu affinen Abbildungen aus einer einfachen synthetischen Überlegung folgt.

R. Sauer (Aachen).

Woude, W. van der, and J. J. Dronkers: *Rectilinear congruences in the three-dimensional projective space built up of quadratic reguli.* Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 867—872 (1938).

λ und λ' seien die Reguli einer Fläche II. Grades L . Die Verf. betrachten eine eingliedrige Schar von Flächen L mit der Einhüllenden (\bar{L}). Durchläuft L die Flächenschar, so erzeugen λ und λ' zwei „komplementäre“ Strahlensysteme K und K' , die im allgemeinen (\bar{L}) als gemeinsame Brennfläche besitzen. Die Charakteristik von L ist eine C_4 . Zerfällt die C_4 in eine Gerade, die zu λ gehört, und in eine C_3 , so zerfällt (\bar{L}) in zwei Flächen R (= Regelfläche) und S . Dabei ist R nur Brennfläche von K' und nicht von K . S enthält einen Brennmantel von K' und beide von K . Zerfällt C_4 in vier Gerade, dann liegen die Brennflächen von K und K' ganz getrennt. Zum Schluß wird ein Tripel von gegenseitig komplementären Kongruenzen betrachtet.

W. Haack.

Nakae, Tatuo: *Eine Anwendung der Quaternionen zur Kugelgeometrie.* Mem. Coll. Sci. Kyoto A 21, 5—30 (1938).

Verf. stellt die Kugel mit dem Mittelpunkt x, y, z und dem Radius r durch die Quaternion $X = irj_0 + xj_1 + yj_2 + zj_3$ dar; dann ergeben sich die Lieschen Transformationen in der Gestalt linearer Quaternionentransformationen $X' = \frac{AX + B}{CX + D}$, wenn man die Division mit Quaternionen sinngemäß einführt und zeigt, daß die Bedingung der Berührung zweier Kugeln X und Y , die $(X - Y)(\overline{X - Y}) = 0$ lautet, dabei invariant bleibt. Es werden die Koeffizientenbedingungen angegeben, damit die Liettransformation speziell eine von Möbius oder von Laguerre ist. Es wird dann mit Quaternionen bewiesen, daß 4 beliebige Kugeln, die einander nicht berühren, in 4 Punkte einer Ebene durch eine geeignete Liettransformation überführt werden können, sowie das Doppelverhältnis dieser 4 Kugeln erklärt. Zum Schluß wird gezeigt, daß $AX\bar{X} + BX + XB + C = 0$ mit $A = \bar{A}, C = \bar{C}$ einen Kugelkomplex definiert, sowie eine Invariante dieses Komplexes angeben.

Bureau (Hamburg).

Frame, J. S.: A symmetric representation of the twenty-seven lines on a cubic surface by lines in a finite geometry. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 658—661 (1938).

Die 85 Ebenen der 3-dimensionalen projektiven Geometrie über dem Galoisschen Körper GF_2 werden durch die Gruppe G_{51840} der halblinaren orthogonalen Transformationen (in der v. d. Waerdenschen Bezeichnungsweise) in 2 Klassen gespalten, nämlich 45 isotrope und 40 nichtisotrope Ebenen. Da G_{51840} die Gruppe der im Titel genannten Konfiguration ist, gelingt es, diese Konfiguration sowohl im isotropen als im nichtisotropen System geometrisch darzustellen, z. B. als die 27 Schnittlinien orthogonaler isotroper Ebenen; die Konfigurationsgruppe ist dann die Gruppe der halblinaren unitären Transformationen. Über die Linienkoordinaten gelangt Verf. zu einer Darstellung im affinen 3-dimensionalen Raum über dem GF_2 . *Friedrich Levi.*

Wong, B. C.: Enumerative properties of plane connected n -lines. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 693—697 (1938).

Verf. betrachtet die Konfiguration K , welche von n in einer Euklidischen Ebene liegenden Geraden a_1, a_2, \dots, a_n , von denen nicht zwei parallel sind, und ihren $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkten gebildet wird. Es wird angenommen, daß in einigen Schnittpunkten $Q_{ij} = a_i a_j$ die Geraden a_i und a_j virtuell keinen Schnittpunkt haben. Die übrigen Schnittpunkte werden mit P_{ij} bezeichnet. Wenn die Konfiguration d Punkte Q_{ij} besitzt und dennoch zusammenhängend ist, so wird sie eine γ_n^d genannt. Dann ist die Maximalzahl D der Punkte Q_{ij} gleich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Die Zahl der Punkte P_{ij} ist $M = \frac{n(n-1)}{2} - d$. Zwei Punkte P_{ij} auf einer selben Geraden a_i heißen anliegend, wenn kein dritter Punkt P_{il} zwischen den beiden erstgenannten Punkten liegt. Die Zahl der Paare anliegender Punkte P_{ij} heißt I und ist $n(n-2) - 2d$; die Zahl der Paare nicht anliegender Punkte wird mit T bezeichnet. Verf. betrachtet auch die Zahl p der einfachen geschlossenen Polygone, von denen jede zwei aufeinanderfolgende Ecken zwei anliegende Punkte P_{ij} sind; es gilt die Formel $p + d = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Nun werden Formeln gegeben, die den Plückerschen Formeln für eine algebraische Kurve m -ter Klasse mit i Wendepunkten, t Bitangenten und mit dem Geschlechte p analog sind; dies ergibt sich, wenn man $m = 2M$, $i = 3I$, $t = 4T$ nimmt und p in beiden Fällen denselben Wert gibt. Verf. gibt keine Erklärung für diese Tatsache.

G. Schaake (Groningen).

Defrise, P.: Sur les courbes possédant une involution abélienne hyperelliptique, sans point multiple. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **7**, 549—553 (1938).

Es sei f eine algebraische Kurve, die eine Abelsche Gruppe von n birationalen Transformationen in sich gestattet. Ein Punkt und seine sämtlichen Bilder sind eine Punktgruppe einer Schar γ_n^1 . Diese Schar kann durch eine Kurve φ vom Geschlechte π dargestellt werden, und es wird vorausgesetzt, φ sei hyperelliptisch. φ gestattet eine Involution der Ordnung 2 in sich. Ihr entsprechen n Involutionen der Ordnung 2 von f in sich. Ist n ungerade, so haben sie alle das Geschlecht $\frac{n-1}{2}(\pi-1)$. Ist n gerade, so teilen sich diese Involutionen in zwei Klassen. Involutionen der gleichen Klasse haben das gleiche Geschlecht. Verf. bestimmt die Summe dieser beiden Geschlechter. Ist f hyperelliptisch, so ist n eine Potenz von 2, und die eingangs erwähnte Gruppe von Transformationen wird durch die genannten Involutionen erzeugt.

Ott-Heinrich Keller (Berlin).

Godeaux, Lucien: Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques. Bull. Sci. math., II. s. **62**, 291—297 (1938).

Von einer d -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_d sei vorausgesetzt, daß die adjungierte Schar einer linearen Schar auf einer Mannigfaltigkeit der Schar stets die volle kanonische Schar ausschneide. Ist nun auf V_d eine doppelpunktsfreie zyklische

Involution von Primzahlordnung p gegeben, auf deren Bildmannigfaltigkeit Ω_d die kanonische Schar effektiv existiert, so enthält die kanonische Schar von V_d insgesamt p lineare Teilscharen, die mittels der Involution zusammengesetzt sind. Eine dieser Teilscharen hat die Dimension π_g ($=$ geom. Geschlecht von Ω_d) und entspricht der kanonischen Schar von Ω_d . Die $p - 1$ anderen haben die Dimension π_g oder $\pi_g - 2$, je nachdem ob d gerade oder ungerade ist. Ist p_g das geom. Geschlecht von V_d , so ist

$$p_g + (-1)^d = p\{\pi_g + (-1)^d\}.$$

Der Beweis wird in den Fällen $d = 2$ und 3 ausgeführt. *van der Waerden* (Leipzig).

Godeaux, Lucien: Sur les variétés appartenant à la variété de Segre représentant les points de n ponctuelles. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 7, 520—524 (1938).

Es sei V_n die Segresche Mannigfaltigkeit, die die Punkte aus n Punktreihen darstellt; sie gehört zu einem Raume S_r , wo $r = 2^n - 1$. Die kanonischen und mehrkanonischen Mannigfaltigkeiten der Schnitte Ω_{n-1} von V_n mit den Quadriken des Raumes S_r haben alle die Ordnung Null. Und das kanonische System des Schnittes W_{n-1} von V_n mit einer kubischen Form des Raumes S_r wird auf W_{n-1} von den Hyperebenen S_{r-1} ausgeschnitten. Diese zwei Sätze, die für $n = 2, 3$ schon bekannt waren, werden hier durch ein Induktionsverfahren von n auf $n + 1$ bewiesen. Einen zweiten, sehr einfachen analytischen Beweis hat man, wenn man die Darstellung von V_n auf einem Raume S_n , der von G. Scorza angegeben worden ist (Atti Accad. Sci. Torino 1909/10), benutzt.

E. G. Togliatti (Genova).

Villa, M.: Proprietà differenziale caratteristica dei coni proiettanti le varietà che rappresentano la totalità delle quadriche di uno spazio lineare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 3—12 (1938).

Auf einer V_k betrachtet man eine Kurve mit folgender Eigenschaft: In jedem Punkt P der Kurve gehören der Schmiegungs- S_3 der Kurve und der Tangential- S_k der V_k einem Raume S_{k+1} an; E. Bompiani hat solche Kurven als „quasiasymptotische Kurven $\gamma_{1,3}$ “ bezeichnet. „ E_2 einer $\gamma_{1,3}$ “ bedeutet ein Element 2. Ordnung einer $\gamma_{1,3}$, d. h. eine Figur, welche aus einem Punkt und aus den betreffenden Tangenten und Schmiegungebenen einer $\gamma_{1,3}$ besteht. — Verf. betrachtet hier eine V_k , welche ∞^δ solcher Elemente E_2 enthält ($k > 1; 2k - 1 \leq \delta \leq 3k - 3$). Im Falle, wo $\delta = 2k - 1$ ist, hat schon E. Bompiani die Form der V_k bestimmt, in der Voraussetzung, daß V_k keine Laplacesche Gleichung darstellt; V_k ist dann die Bildmannigfaltigkeit der Quadriken eines Raumes S_k . (Zwar setzt E. Bompiani voraus, daß V_k ∞^{2k-2} Kurven $\gamma_{1,3}$ enthält; seine Voraussetzung kann aber leicht zur allgemeineren ausgedehnt werden, daß V_k $\infty^{2k-1} E_2$ von $\gamma_{1,3}$ enthält, wie hier in § 5 gezeigt wird.) Für ein beliebiges δ drücken die analytischen Bedingungen für das Bestehen der gewünschten Eigenschaft (§ 5) auch die andere Eigenschaft aus, daß die Tangential- S_k der V_k eine W bedecken mit der Dimension $2k - (\delta - 2k + 1)$ (§ 6); ein bekannter Satz von A. Terracini (Atti Accad. Sci. Torino 1913) gestattet dann zu behaupten, daß im Fall, wo V_k die niedrigste Anzahl von linear unabhängigen Laplaceschen Gleichungen darstellt, V_k ein Kegel ist, welcher eine $V_{3k-\delta-1}$ aus einem $S_{\delta-2k}$ projiziert (§ 7); diese $V_{3k-\delta-1}$ stellt keine Laplacesche Gleichung mehr dar, und die E_2 der gegebenen V_k projizieren sich auf $\infty^{2(3k-\delta-1)-1}$ ähnliche E_2 der $V_{3k-\delta-1}$ (§ 8); aus dem oben zitierten Satz von E. Bompiani schließt man so, daß V_k der Kegel $C_k^{\delta-2k}$ ist, welcher aus einem $S_{\delta-2k}$ die Bildmannigfaltigkeit der Quadriken eines $S_{3k-\delta-1}$ projiziert. Im § 9 wird dieser Satz im Falle $\delta = 3k - 3$ vervollständigt: Die anderen V_k mit der gewünschten Eigenschaft (und die also eine größere Anzahl von Laplaceschen Gleichungen darstellen) sind jetzt die nichtabwickelbaren V_k eines Raumes S_{k+2} . Die §§ 1, 2, 3, 4, 10 enthalten unter anderem verschiedene Bemerkungen über die Elemente E_2 von $\gamma_{1,3}$, die auf den Kegeln $C_k^{\delta-2k}$ liegen; jene ∞^δ Elemente E_2 sind immer die Elemente 2. Ordnung aller Kegelschnitte, die auf $C_k^{\delta-2k}$ liegen; für $\delta = 2k - 1$ lassen sie sich eindeutig auf ∞^{2k-2} Kurven $\gamma_{1,3}$ anordnen, und diese Kurven

fallen mit jenen Kegelschnitten zusammen; für $\delta > 2k - 1$ hängt eine solche Anordnung von willkürlichen Funktionen ab und führt zu allen Kurven, die den quadratischen Kegeln von $C_k^{\delta-2k}$ angehören (darunter finden sich auch die Kegelschnitte von V_k).
E. G. Togliatti (Genova).

Chisini, O.: Un più generale teorema d'esistenza dei piani multipli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 535—537 (1938).

In einigen früheren Abhandlungen hat Verf. eine Konstruktion angegeben, welche zu einer sehr allgemeinen Form der Verzweigungskurve $\varphi(x, y) = 0$ einer n -fachen Ebene führt (dies. Zbl. 9, 407; 13, 318). Hier gibt er eine ähnliche Konstruktion einer neuen und noch allgemeineren Form der Kurve $\varphi = 0$. Es seien C_{ik} einige ebene algebraische Kurven; die Buchstaben i, k nehmen insgesamt alle Werte $1, 2, \dots, n$ an, so daß die Vertauschungen (i, k) eine transitive Substitutionsgruppe erzeugen. Es seien P die Schnittpunkte der Kurven C_{ih}, C_{ik} und Q diejenigen der Kurven C_{ih}, C_{ki} . Auf jeder zweimal gezählten Kurve C betrachtet man die Punkte P als Verzweigungspunkte. Die so gewonnene Kurve $\bar{\varphi}$ unterwirft man einer unendlich kleinen Änderung, so daß an Stelle jedes Punktes P 3 Spitzen und an Stelle jedes Q 4 Doppelpunkte erscheinen. Man hat so die gesuchte Verzweigungskurve φ . Die Konstruktion der n -fachen Ebene aus ihrer Verzweigungskurve φ folgt wie früher. — Wenn die gegebenen Kurven 3 Geraden C_{12}, C_{23}, C_{31} sind, so ist φ eine C^6 mit 9 Spitzen; dieser Fall kann nicht aus der früheren Konstruktion erhalten werden. — Ob die neue Konstruktion alle n -fachen Ebenen liefern kann, bleibt noch unentschieden. *Togliatti.*

Enriques, F.: Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 493—498 (1938).

Einige Bemerkungen über eine Abhandlung von B. Segre (dies. Zbl. 19, 79). In dieser Abhandlung hat B. Segre einen neuen algebraisch-geometrischen Beweis der Grundeigenschaft der irregulären algebraischen Flächen gegeben (d. h. der Existenz auf einer solchen Fläche von vollständigen und nichtlinearen Kurvensystemen, die aus $\infty^{p_g-p_a}$ Linearsystemen bestehen); der Beweis ist auf folgenden Grundgedanken gestützt: Eine irreduzible Kurve γ enthält eine Linearschar g ; wenn γ sich einer zerfallenden Grenzlage nähert, so ist die Grenzlage von g eine Äquivalenzschar, deren Dimension nicht kleiner als die Dimension von g sein kann. — Nun bemerkt hier F. Enriques, daß die Gültigkeit dieses Prinzips nicht unmittelbar ist; er gibt zwei Beispiele, wo die zweite Dimension kleiner als die erste ist; das zweite Beispiel lautet: Eine irreduzible ebene C^8 mit 15 Doppelpunkten besitzt eine kanonische g_{10}^5 ; zerfällt C^8 in zwei C^4 , so besteht die Grenzlage der g_{10}^5 aus den kanonischen g_4^2 der beiden C^4 , denen der 16. Schnittpunkt der zwei C^4 als fester Punkt hinzugefügt werden muß; sie hat also nur die Dimension 4. Verf. zeigt dann, daß diese Bemerkung die Schlußbetrachtungen des Beweises von B. Segre beeinflussen. — Im zweiten Teil gibt er eine Rechtfertigung der Einführung und der Benutzung der Kurven einer Fläche, die einer gegebenen Kurve dieser Fläche in den Umgebungen 1., 2., 3., ... Ordnung unendlich nahe liegen (dies. Zbl. 10, 219; 14, 364; 15, 40 u. 228; 18, 38); diese Begriffe und Methoden hatte B. Segre in der anfangs genannten Abhandlung für nicht einwandfrei gehalten.
E. G. Togliatti (Genova).

Turri, T.: Sui sistemi lineari di reciprocità razionali da cui derivano gruppi di omografie, i quali non lasciano fisso alcun spazio razionale. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari 8, 126—130 (1938).

Görner, Gerhard: Kennzeichnung der halbrationalen Körper. Halle a. d. S.: Diss. 1936. 39 S.

Castelnuovo und Enriques haben 1901—1905 den Satz bewiesen, daß eine algebraische Fläche mit den Geschlechtern $p_g = P_2 = P_3 = \dots = 0$ entweder rational oder halbrational, d. h. birational äquivalent einer Regelfläche vom Geschlechte $-p_a$ ist. Für diesen Satz gibt Verf. einen auf den von H. W. E. Jung entwickelten Methoden fußenden strengen Beweis, der sich allerdings in den entscheidenden Gedanken an das

italienische Vorbild anlehnt. Verf. scheint die neue Darstellung des Fragenkreises von F. Enriques [Rend. Semin. mat. Roma, III. s. 1, Pt. 2, 7—190 (1934); dies. Zbl. 10, 219] unbekannt geblieben zu sein.

Harald Geppert (Gießen).

Differentialgeometrie:

Rasmussen, Ruth B.: Metric properties of the cylinder of Kubota. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 674—677 (1938).

Nach Kubota kann man jeder durch P gehenden Tangente t einer Fläche (P) affin-invariant einen parabolischen Zylinder zuordnen [Sci. Rep. Tōhoku Univ. (1) 19, 163f. (1930)]. Verf. berechnet mit metrischen Hilfsmitteln den Zylinder und betrachtet seine Diametralebene E durch P . Dreht sich t um P , so umhüllt E einen Kegel vierter Ordnung.

W. Haack (Karlsruhe).

Comenetz, George: Conformal geometry on a surface. Ann. of Math., II. s. 39, 863—871 (1938).

In the review of papers by Kasner and Comenetz (this Zbl. 14, 178) and by Kasner himself (this Zbl. 19, 80) (comp. also the abstracts of papers by Kasner, this Zbl. 16, 367; 18, 41, 236; by Kasner and de Cicco, this Zbl. 19, 278, and finally by Comenetz, this Zbl. 18, 236) the referee observed that the results obtained there may be generalised for a surface or proved very easily by means of tensor calculus. In the present paper the author extends indeed those results for a surface, without using the tensor calculus at all, by a direct calculation. (It was to be expected, that for the invariants of higher order the Gaussian curvature plays some rôle, as it is shown by the author.)

Hlavatý (Praha).

Vakselj, Anton: Eine Anwendung der linearen Substitution einer komplexen Veränderlichen in der Flächentheorie. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 161—170 (1938).

Ausdehnung einer vom Verf. schon behandelten Konstruktion (dies. Zbl. 8, 322). Der Ref. wurde gezwungen, manche Ergebnisse von den vielen Zufälligkeiten frei zu machen und zu verallgemeinern, um einen lesbaren Bericht über diese zu sehr auf die Einzelheiten eingehende Arbeit bringen zu können. — Es seien r bzw. t die Krümmung und die geodätische Windung einer auf der Fläche F im Punkte P geführten Kurve K . Ist $(Ldu)^2$ die symbolische Schreibweise der zweiten Fundamentalform von F und du bzw. du_0 die Tangentenrichtung in P an K bzw. eine isotrope Tangentenrichtung, so erweist sich $z=r+it$ als homographische Funktion $z=(Ldu_0)/(Ldu)$ des reellen Parameters $du^1:du^2$. Daraus folgt unmittelbar, daß z in der Zahlenebene den Kreis $1/|z-H|=D$ beschreibt, mit $2H=1/R_1+1/R_2$ und $2D=|1/R_1-1/R_2|$, wobei $1/R_1$ und $1/R_2$ die Hauptkrümmungen in P sind. — Es sei Φ eine zweite in P an F tangent gelegene Fläche, so daß der Richtung du auf Φ die Größe $\zeta=\varrho+i\sigma$ entspricht. Es gilt noch 2. $|\zeta-H|=D$. Wegen 1. und 2. reduziert sich eine lineare Beziehung $\zeta=m\bar{z}+n$ beider komplexen Größen entweder auf a) $\zeta=\zeta^0$ oder auf b) $(\zeta-H):D=e^{2i\varphi}(\bar{z}-H):D$, unter ζ^0, φ Konstanten verstanden. Man setzt voraus, daß im Falle b) die Größen \mathcal{H}, D für alle zu P gehörigen Flächen Φ fest bleiben. Im Falle a) genügt es, eine ableitbare Änderung derselben vorauszusetzen. — Verschiebt man jetzt Φ längs du um eine kleine Strecke, so geht die Charakteristik von Φ durch P und besitzt in diesem Punkte eine Tangentenrichtung dv . Im Falle a) ist die Beziehung $dv \leftrightarrow du$ eine Homographie, aber keine allgemeine. Sie ist das Produkt einer beliebigen Involution mit einer Symmetrie in bezug auf eine Hauptrichtung von Φ . Im Falle b) aber ist die Beziehung eine beliebige Involution. — Die Arbeit enthält noch eine genaue Besprechung der Sonderfälle dieser homographischen Relationen.

D. Barbilian (București).

Mitrinovitc, Dragoslav: Sur l'équation différentielle des lignes de courbure. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 32—35 (1938).

Stellt man eine Fläche $z=F(x, y)$ als Einhüllende der Ebenen $z+ux+vy=\theta(u, v)$ dar, so entspricht ihren Krümmungslinien eine quadratische Gleichung für dv/du .

Verf. stellt sie auf und zieht einige Konsequenzen aus der Form ihrer Koeffizienten. *Lochs* (Bregenz).

Mitrinovitsh, Dragoslav S.: Recherches sur les lignes asymptotiques. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 4, 105—120 (1938).

Stellt man eine Fläche dar als Hüllgebilde der umbeschriebenen Zylinder mit Erzeugenden parallel zur (x, y) -Ebene, also durch $z + vy = F(x, v)$, $y = \frac{\partial F}{\partial v}$, wo v der Parameter der Zylinderschar darstellt, so werden die asymptotischen Linien dargestellt durch $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$. Verf. setzt $F(x, v)$ als Polynom in v voraus, mit Koeffizienten, die von x abhängen, und untersucht, wann die Gleichung der Asymptotischen die Form annimmt $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = a(x)v^2 + b(x) \cdot v + c(x)$, wo $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ vorgegebene Funktionen sind. Er zeigt, daß die Beantwortung dieser Frage an der Lösung der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{dx^2} - M \cdot a(x)y$ hängt, wo M eine beliebige Konstante ist. Ist diese Gleichung für jeden Wert von M integrierbar, so lassen sich die gesuchten Flächen durch Quadraturen bestimmen. Hiervon ausgehend stellt Verf. einige Klassen von Flächen auf, deren Asymptotische sich durch Quadraturen bestimmen lassen. *Bol* (Freiburg).

Myller, A.: Surfaces spirales archimédiennes. C. R. Acad. Sci. Roum. 2, 606—608 (1938).

Vincensini, P.: Sur les suites de Laplace contenant des éléments orthogonaux. J. Math. pures appl., IX. s. 17, 327—366 (1938).

C. Guichard hat in mehreren Arbeiten (Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques. Ann. École norm. sup. 1897, 1898, 1903) jedem konjugierten Netz auf verschiedene Weise Kongruenzen zugeordnet derart, daß die Zuordnung gegenüber Laplaceschen Transformationen invariant ist. — Ein Netz heißt O (= orthogonal), wenn sich die Netzkurven rechtwinklig schneiden. Jede zu einem O -Netz orthogonale Kongruenz heißt ebenfalls O . Ein Element (Netz oder Kongruenz) heißt Σ , wenn seine beiden ersten Laplaceschen Transformierten O -Elemente sind. Verf. untersucht zunächst die Σ -Elemente und ihre Laplaceschen Folgen, die nach beiden Seiten, ausgehend von Σ , die Gestalt $O, 2O, 3O \dots$ in der Bezeichnung von Guichard besitzen. Sind in der Folge $\dots M_{-2}, M_{-1}, O, \Sigma, O, M_{+1}, M_{+2}, \dots$ die Elemente M_{-2} und M_{+2} (Netze oder Kongruenzen) O -Elemente, so sind alle gradzahligen Elemente O . Die O -Elemente besitzen paarweise dasselbe sphärische Bild. Ähnliche Sätze gelten für eine Laplacesche Folge, in der das Element M und das (im Sinne v) k -te transformierte M_{+k} vom Typ O sind. Dann sind die Elemente M_{-k}, M_{2k} vom Typ $2O$, die Elemente M_{-2k}, M_{3k} vom Typ $3O$ usw. Sind von diesen Elementen drei aufeinanderfolgende (also im Abstand k der Folge) O , so sind sie alle O . Dann muß aber $k > 1$ sein. Die Bestimmung einer O -Folge für $k = 2$ führt auf ein System von drei Differentialgleichungen. — Der letzte Teil der Arbeit behandelt Laplacesche Folgen mit zwei benachbarten O -Elementen. Die Untersuchung führt auf die Flächen von Voss und von Guichard. Unter anderem bestimmt Verf. die Ribaucourschen Transformationen, die eine Fläche von Guichard wieder in eine solche Fläche überführen.

W. Haack (Karlsruhe).

Pietsch, Hans: Über Flächen, die ein Büschel geschlossener geodätischer oder ein Paar konjugierter Gegenpunkte besitzen. Schr. math. Inst. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 4, 75—116 (1938).

This paper contains a study of 2-dimensional Riemannian manifolds with certain special properties. The totality of geodesics through a point P is called a pencil of geodesics, and a point Q is said to be opposite to a point P if Q is the n -th conjugate point to P on all geodesics issuing from P . Typical results are the following. A sur-

face S with a pencil p of closed geodesics is closed (compact). If the geodesics of such a pencil p are of bounded length, which follows if S is analytic or if P is opposite to itself, then S is homeomorphic to the sphere or projective plane and all the geodesics of p are of equal length. (Some exceptional ones must be traversed multiply to obtain this length.) If a surface S has a pair of opposite points, it is homeomorphic to the sphere or projective plane. If Q is opposite to P and at a distance of r from P along all the geodesics joining them, and if the geodesics through P are all closed, then the length of these geodesics is r or $2r$ according as $Q = P$ or $Q \neq P$. If Q is opposite to P and is the first conjugate point to P , then S is homeomorphic to the sphere or projective plane according as $Q \neq P$ or $Q = P$, and the geodesics through P form the topological image of the geodesics through a point of the sphere or projective plane. Some of these results, as the author points out, are direct consequences of work of the referee [S. B. Myers, *Duke math. J.* **1**, 376—391 (1935), this Zbl. **12**, 275, and **13**, 322] and of W. Rinow [Math. Z. **35**, 512—528 (1932); this Zbl. **4**, 367].

S. B. Myers (Ann Arbor).

Ghosh, N. N.: New methods in the geometry of hyperspace. *Bull. Calcutta Math. Soc.* **30**, 73—84 (1938).

Verf. verwendet seinen Kalkül mit skalaren Determinanten, den er früher (vgl. dies. Zbl. **15**, 54 u. 315) entwickelt hat, um elementare Formeln für den k -dimensionalen Schmiegraum, die k -dimensionale Schmieghyperkugel und den r -fachen Normalenraum einer Kurve im R_n abzuleiten.

G. Köthe (Münster).

Monna, A. F.: Zur Theorie der Kurven im Hilbertschen Raum. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **41**, 889—895 (1938).

$x = f(t; s)$ sei eine von der Bogenlänge s abhängige Kurve im Hilbertschen Raum der in $[0, 1]$ quadratisch integrierbaren Funktionen. Die $\frac{d^v x}{ds^v}$ seien linear unabhängig für beliebig großes v , $f(t; 0) = 0$. Durch Orthogonalisierung der Vektoren \dot{x}, \ddot{x}, \dots erhält man zu jedem Punkt der Kurve die Tangente $L_0(t; s)$ und die Normalen $L_1(t; s)$, $L_2(t; s), \dots$ Nach S. Minetti [*Mém. Sci. math.* **79** (1936); dies. Zbl. **14**, 314] gelten die Frenetformeln $(1) \frac{dL_i}{ds} = \Gamma_{i-1}(s)L_{i-1} - \Gamma_i(s)L_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots$; $\Gamma_{-1} = 0$). Die Funktionen $\Gamma_i(s)$ heißen die Krümmungen von x . Sind umgekehrt die $\Gamma_i(s)$ gegeben als in $|s| \leq \rho$ für alle i regulär-analytische Funktionen, für die $|\Gamma_i(s)| \leq M$ für $|s| \leq \rho$ gilt, so beweist Verf., daß das simultane unendliche System (1) nach den L_i auflösbar ist und die Kurve $x = \int_0^s L_0(t; s) ds$ die gegebenen Krümmungen hat. x ist bei im Nullpunkt vorgeschriebenen $L_i(t; 0)$ eindeutig bestimmt.

G. Köthe (Münster i. W.).

Topologie:

Davatz, W.: Über die Zerteilung der Ebene durch ein einfaches Polygon. *Publ. Math. Univ. Belgrade* **6/7**, 219—239 (1938).

Beweis des Satzes, daß ein einfaches Polygon die Ebene in genau zwei zusammenhängende Teile zerlegt, allein auf Grund der Hilbertschen Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome.

van der Waerden (Leipzig).

Jones, F. B.: Concerning R. L. Moore's axiom 5. *Bull. Amer. Math. Soc.* **44**, 689—692 (1938).

It is shown that axiom 5 of R. L. Moore's system which postulates the existence, in a region R , of a simple closed curve separating any two given points a and b of R can be proved, in the presence of axioms 0—4 of this system, from the weaker assertion that any two points of a region R can be separated in R by a compact continuum.

G. T. Whyburn (Virginia).

Klein, Fritz: Zur Geometrie des Verbindens und Schneidens. *Deutsche Math.* **3**, 403—407 (1938).

In combinatorial topology, the cells of any simplex form a Boolean algebra,

when partially ordered by the relation " x is on the boundary of y ". The author points out that simplexes are special instances of a more general class of abstract "quasi-simplexes", including also finite projective geometries. His idea is closely related to Cayley's concept of a "tactical configuration" [cf. E. H. Moore, Tactical memoranda. I—III. Amer. J. 18 (1896)]. The author does not define "quasi-complexes" built up of "quasi-simplexes"; thus his definition does not open up new vistas in combinatorial topology.

Garrett Birkhoff (Cambridge U. S. A.).

Lévy, Paul: Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout. J. École polytechn., III. s. 144, 227—247 et 249—291 (1938).

Gegenstand der Untersuchung sind die ebenen und räumlichen Kurven C , die für ein geeignetes natürliches p Summe von p zu C ähnlichen, echten Teilkurven sind. Verf. gibt ein allgemeines Konstruktionsverfahren für solche Kurven an, untersucht das lokale Verhalten (z. B. wird gezeigt, daß C nirgends differenzierbar ist außer im Fall der Strecke), konstruiert anschauliche Beispiele und schließt mit einer allgemeinen Konstruktion für Flächen F im R_3 , die Summe sind von p zu F ähnlichen, echten Teilflächen.

Nöbeling (Erlangen).

Mazurkiewicz, Stefan: Sur les transformations continues des courbes. Fundam. Math. 31, 247—258 (1938).

Denoting the Euclidean plane by R_2 , and by R_2^A the space of all continuous transformations of the metric space A into subsets of R_2 the author proves that if C is a curve (i.e. a 1-dimensional continuum), the set of all transformations $f \in R_2^C$ such that $f(C)$ is homeomorphic with the plane universal curve of Sierpiński is residual in R_2^C . Also it is shown that if E is compact and contains a curve, and if $\Gamma_1(E)$ denotes the space of all curves in E , all transformations $f \in R_2^E$ with the exception of a set of the first category in R_2^E transform all curves of E with the exception of a set of the first category in $\Gamma_1(E)$ into continua homeomorphic with the Sierpiński universal curve.

G. T. Whyburn (Virginia).

Roberts, J. H., and N. E. Steenrod: Monotone transformations of two-dimensional manifolds. Ann. of Math., II. s. 39, 851—862 (1938).

Eine eindeutige, stetige Abbildung eines topologischen Raumes M auf einen Raum G heißt monoton, wenn das Urbild jedes Punktes von G zusammenhängend ist. R. L. Moore hat gezeigt, daß die monotonen Bilder der 2-Sphäre die Kaktioide sind [Mh. Math. Phys. 36, 81—88 (1929)]. Verff. zeigen, daß die monotonen Bilder der geschlossenen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten diejenigen lokal zusammenhängenden Kontinua sind, welche durch endlich viele Punktidentifizierungen entstehen aus den verallgemeinerten Kaktoiden, d. h. denjenigen lokal zusammenhängenden Kontinua, für welche jedes maximal zyklische Element eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, und zwar, abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmen, eine 2-Sphäre ist.

Nöbeling (Erlangen).

Hopf, H., und M. Rueff: Über faserungstreue Abbildungen der Sphären. Comment. math. helv. 11, 49—61 (1938).

Die Möglichkeit einer Faserung ohne Ausnahmefaser bei der 3dim. Hypersphäre S_3 , die hier im wesentlichen eindeutig ist (H. Seifert, dies. Zbl. 6, 83), läßt sich auf die S_{2n+1} wenigstens insoweit übertragen, als eine spezielle Faserung \mathfrak{F} ohne Ausnahmefaser bei der Sphäre $\sum_{j=1}^{n+1} z_j \bar{z}_j = 1$ aufgezeigt werden kann. Diese Faserung ist ein komplexes Analogon zur Gruppierung der Punkte der Hypersphäre $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ in Antipodenpaare. Es wird in Verallgemeinerung eines Ergebnisses von M. Rueff (vgl. dies. Zbl. 19, 331), das mit anderer Methode in drei Dimensionen gefunden wurde, der Satz bewiesen, daß für stetige, bez. \mathfrak{F} faserungstreue Abbildungen der S_{2n+1} in sich der Abbildungsgrad $c = c^{n+1}$ ist (c = Abbildungsgrad der einzelnen Faser). Es ist dies das Analogon zu einem Satz von K. Borsuk (Fundam. Math. 20, 177) über stetige

antipodentreue Abbildungen, wonach für $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ Abbildungen der Abbildungsgrad ebenfalls $\begin{cases} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{cases}$ ist. Desgleichen ergibt sich ein komplexes Analogon zu einer Folgerung (Alexandroff-Hopf, Topologie I, 485) aus dem Borsukschen Satz, wenn der Begriff der „schwach homogenen Funktion vom Grad m “ eingeführt wird, welche durch die Gleichung $f(kz_1, \dots, kz_p) = k^m \cdot f(z_1, \dots, z_p)$ mit $|k| = 1$ erklärt wird. Es folgt nämlich rasch aus obigem Abbildungssatz, daß für n stetige, auf $\sum_{j=1}^{n+1} z_j \bar{z}_j = 1$ erklärte Funktionen $f_r(z_1, \dots, z_{n+1})$, die schwach homogen bzw. vom Grad $m_r \neq 0$ sind, auf der S_{2n+1} gemeinsame Nullstellen vorhanden sind. R. Furch (Rostock).

Menger, Karl: An abstract form of the covering theorems of topology. Ann. of Math., II. s. 39, 794—803 (1938).

Applications of the logic of relations are made to yield theorems concerning an abstract set (not necessarily having a topology) and a general mapping of one such set into another which may be regarded as generalizations of the well-known covering theorems of topology. The quantitative as well as the qualitative features of these covering theorems are made to assume an abstract form. G. T. Whyburn.

Whyburn, G. T.: Interior transformations of certain curves. Duke math. J. 4, 607—612 (1938).

Eine eindeutige, stetige Abbildung heißt eine innere Abbildung, wenn sie jede offene Menge des Urbildes auf eine offene Menge des Bildes abbildet. Sie heißt licht, wenn jeder Bildpunkt ein nulldimensionales Urbild hat. Verf. gibt 1. Bedingungen dafür, daß eine Abbildung licht ist [Beispiel: Ist A ein lokal zusammenhängendes Kontinuum mit der Eigenschaft, daß die Begrenzung jeder offenen Teilmenge von A nulldimensional ist, so ist jede innere Abbildung von A auf eine mehrpunktige Menge licht]; 2. werden Sätze bewiesen über die Urbilder von Zerlegungs- und Zerschneidungspunkten bei inneren Abbildungen [Beispiel: Ist A ein Kontinuum und $T(A) = B$ eine innere Abbildung, so enthält für jeden Punkt b von B das Urbild $T^{-1}(b)$ höchstens abzählbar viele lokale Zerlegungspunkte (local separating points) von A]; 3. werden die inneren Abbildungen von Bäumen untersucht [Beispiel: Sei A ein Baum, $T(A) = B$ eine innere Abbildung von A und $k(x)$ die Urbildanzahl eines Punktes x von B ; dann gilt für jeden Punkt x eines Bogens ab von B die Ungleichung $k(x) \leq k(a) + k(b) - 1$]; 4. studiert Verf. innere Abbildungen von Randkurven, d. h. lokal zusammenhängenden Kontinuen, deren sämtliche zyklische Elemente einfache geschlossene Kurven sind [Beispiel: Die Eigenschaft, eine Randkurve zu sein, ist invariant gegenüber inneren Abbildungen]; 5. werden eindimensionale innere Bilder zweidimensionaler Pseudomannigfaltigkeiten untersucht [Beispiel: Ist A eine zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeit, $T(A) = B$ eine innere Abbildung, $T^{-1}(b)$ lokal zusammenhängend für jeden Punkt b von B und B eindimensional, so ist B ein Bogen oder eine einfache geschlossene Kurve]. Nöbeling (Erlangen).

Whyburn, G. T.: Interior surface transformations. Duke math. J. 4, 626—634 (1938).

Es seien die Voraussetzungen der Arbeit des Verf. Amer. J. Math. 60, 477—490 (1938) (dies. Zbl. 18, 278) erfüllt. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Eulerschen Charakteristiken von A und B einer einfachen Gleichung genügen, in welcher nur von A , B und T abhängende ganze Zahlen vorkommen. Es werden zahlreiche Beispiele dieser Gleichung gegeben. Schließlich wird eine Methode entwickelt, durch welche das vorliegende und andere Ergebnisse bez. der genannten Abbildungen T auf zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeiten ausgedehnt werden. Nöbeling.

Lefschetz, S.: On locally connected sets and retracts. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 24, 392—393 (1938).

The Note summarizes some interesting results on locally connected sets and retracts. The abbreviations are those of previous papers of the Author on the subject. \Re indicates

a compact metric space. — In the Note are stated: A necessary and sufficient condition for \mathfrak{R} to be LC^p , a property of \mathfrak{R} when it is LC^p , two necessary and sufficient conditions for \mathfrak{R} to be LC^* and two necessary and sufficient conditions for \mathfrak{R} to be LC^{**} . — Particular definitions are introduced in the Note. *Achille Bassi* (Bologna).

Alexander, J. W.: A theory of connectivity in terms of gratings. *Ann. of Math.*, II. s. **39**, 883—912 (1938).

Ein Gitter (grating) eines Raumes x besteht aus endlich oder unendlich vielen geordneten Paaren (a, c) von Unterräumen a, c , deren Vereinigungsmenge $a + c = x$ ist. Der Durchschnitt $ac = b$ heißt die Barriere des Paares. Ist x der n -dimensionale Koordinatenraum, so bilden die Paare abgeschlossener Halbräume ein Gitter desselben. Jedem Gitter aus endlich vielen (etwa n) Paaren lassen sich in abstracto Zellen, Ketten und ein Kettenring zuordnen, nämlich die Zellen und Ketten des n -dimensionalen linearen Raumes, der von n Paaren von Halbräumen überdeckt ist. Aus dem Kettenring Π des Gitters entsteht der Zusammenhangsring \mathcal{E} (connectivity ring) des Raumes x , indem die Ketten, welche in x die leere Menge bedecken, zu einem Ideal Ω zusammengefaßt und Π und Ω genommen wird. Die genannten Ringe lassen sich auch für Gitter aus unendlich vielen Paaren erklären. Der Zusammenhangsring eines normalen Raumes läßt sich sowohl aus dem Gitter aller Paare offener wie aller Paare abgeschlossener überdeckender Unterräume gewinnen, und es läßt sich eine umfassende Klasse von Gittern angeben, aus denen sich ebenfalls der Zusammenhangsring ableiten läßt.

K. Reidemeister (Marburg, Lahn).

Mechanik.

Allgemeines:

Cattaneo, C.: Sul contatto di due corpi elastici: Distribuzione locale degli sforzi. *I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **27**, 342—348 (1938).

Die Theorie von Hertz soll dadurch verallgemeinert werden, daß auch Reibungskräfte zwischen den sich berührenden Körpern zugelassen werden sollen. Als Ansatz für den elastischen Verschiebungsvektor u wird gewählt

$$4\pi\mu u = \partial L / \partial z - k [\text{grad } \chi + (\psi - \partial \chi / \partial z) z_1] - z \text{ grad } \psi + \text{rot}[z_1 \text{ rot } L'] z_1,$$

worin die gemeinsame Normale als z -Richtung gewählt ist und der Ursprung im Berührungszentrum liegt. z_1 ist der Einheitsvektor in der z -Richtung, $k = \mu / (\lambda + \mu)$, μ und λ die in beiden Körpern gleichen Laméschen Konstanten und $\psi = \text{div } L$, $\chi = \text{div } L'$. Die Vektoren L und L' sind Flächenintegrale der Form $L = \int l \log(z+r) d\sigma$, $L' = \int l [z \log(z+r) - r] d\sigma$, worin l die vorläufig unbekannte Verteilung der Oberflächenkräfte über die gemeinsame Oberfläche σ der sich berührenden Körper bedeutet, deren Oberflächenelement $d\sigma$ ist. r ist der Abstand zwischen $d\sigma$ und Aufpunkt. Falls $l = (l, m, n)$, lautet die Reibungsbedingung $l^2 + m^2 \leq f^2 n^2$, mit f als Reibungszahl. Indem er die geometrische Bedingung der Berührung wie bei Hertz ansetzt, gewinnt Verf. drei Integralgleichungen erster Art zur Bestimmung der Funktionen l, m, n . Die Integrale sind dabei über das vorläufig unbekannte Gebiet σ erstreckt. Die entsprechenden Integralgleichungen im Falle verschiedener elastischen Konstanten der beiden Körper werden auch mitgeteilt.

F. Odqvist (Djursholm).

Sezawa, Katsutada, and Kyoshi Kanai: Anomalous dispersion of elastic surface waves. *II. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo* **16**, 683—689 (1938).

Klitchieff, J.: Eine Lösung der ebenen Spannungsaufgabe mittels trigonometrischer Reihen. *Publ. Math. Univ. Belgrade* **5**, 157—162 (1936).

Pailloux, Henri: Sur l'équilibre de certaines membranes déformables. *C. R. Acad. Sci., Paris* **206**, 1706—1708 (1938).

The author studies the equilibrium of a surface such that the stress across an arbitrary line at a point has a fixed direction, and vanishes for one line. — Such a sur-

face may be realised approximately by covering a rubber membrane with a continuous distribution of threads, the tension in the rubber being negligible in comparison with that in the threads. It is shown that when a normal pressure is applied to the surface the tension is constant along each thread, and each thread is a geodesic on the surface. Two special cases are discussed.

J. L. Synge (Toronto).

● **Milne-Thomson, L. M.:** *Theoretical hydrodynamics*. London: Macmillan & Co., Ltd. 1938. XXI, 552 pag. bound 31/6.

The book begins with some applications of Bernoulli's theorem to flow in a channel, the Pitot tube, adiabatic expansion and the flow of gas in a converging pipe. Euler's momentum theorem is then given and an account is given of d'Alembert's paradox. The discussion of the equations of motion is preceded by a useful chapter on vector analysis which prepares the reader for the extensive use which is made of vector notation. The chapter on conformal representation is likewise preceded by a brief discussion of the theory of functions of a complex variable. — A feature of the work on flow in two dimensions is the use of the theorem of Blasius and Lagally's theorem. A treatment of flow round an aerofoil is given with the aid of Joukowski's transformation. There are chapters on moving cylinders, the Schwarz-Christoffel transformation, jets and currentswakes and rectilinear vortices. The theory of Karman's vortex street is treated in the last of these chapters. A useful chapter on waves completes the study of motion in two dimensions. — The study of motion in three dimensions commences with a chapter on Stokes' stream-function. This contains some remarks on airship forms. The next chapter on spheres and ellipsoids contains in particular some problems relating to the motion of two spheres. A chapter on the motion of a solid through a liquid is followed by one on vortex motion and the book closes with a chapter on viscosity which contains an account of Prandtl's theory of the boundary layer. — At the end of each chapter there are numerous examples many of which were set at examinations given by the University of London and The Royal Naval College.

H. Bateman (Pasadena).

Vedrov, V.: *On the stability of motion*. Rep. Joukovsky Centr. Inst. Aero-Hydrodyn. Nr 327, 1—16 (1937) [Russisch].

Pailloux, Henri: *Mouvements fluides fournissant une suite de surfaces applicables*. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 319—321 (1938).

Beweis des folgenden Satzes: Damit bei einer Strömung eine unausdehnbare Fläche $f(x, y, z, t) = 0$ existiert, die immer aus denselben materiellen Teilchen besteht, ist die notwendige und hinreichende Bedingung das Verschwinden der Determinante des Deformationstensors auf der Fläche.

C. Schmieden (Darmstadt).

Himmelsmechanik, Gleichgewichtsfiguren:

Bezold, W. v.: *Die Bahnen der Doppelsterne $\sum 1536$, $\sum 1819$ und $\sum 2130$ nach der Methode von W. Rabe*. Astron. Nachr. 267, 221—252 (1938).

Die von W. Rabe [Astron. Nachr. 265, 177 (1938); dies. Zbl. 18, 180] ausgearbeitete Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen aus kurzen Bahnbögen wird an einigen Doppelsternen neu geprüft. Es zeigt sich, daß sich die Methode selbst in solchen Fällen bewährt, in denen eine sinnvolle Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unmöglich ist.

Klose (Berlin).

Uno, Tosio: *Recherches sur les solutions périodiques dans le problème restreint des trois corps*. Jap. J. Astron. Geophys. 15, 149—191 (1938).

Der Hauptzweck des Verf. ist ein Nachweis für die Nichtexistenz unsymmetrischer periodischer Lösungen erster und zweiter Sorte im Falle eines hinreichend kleinen Massenprozentensatzes. Zu diesem Zweck wird zunächst eine Integralbeziehung hergeleitet, die im Falle der zweiten Sorte für die reelle Lösbarkeit der „Verzweigungsgleichung“ eine notwendige Bedingung darstellt. Es wird dann durch langwierige, auf Entwicklungen der Keplerschen Bewegung und der Störungsfunktion beruhende

Rechnungen gefunden, daß diese notwendige „Orthogonalitätsbedingung“ nur unter Annahme von Symmetrie erfüllt sein kann [vgl. G. D. Birkhoff, *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. 4, 267—306 (1935); Ende des Referats in dies. Zbl. 12, 128—129]. Im Falle der ersten Sorte sind Behandlung und Rechnung noch schwieriger und werden auf ausgedehnte Entwicklungen gegründet, die die Ansätze von Poincaré [*Bull. Astron.* 19, 177—198 (1902)] über den Zusammenhang der beiden Sorten weiterführen und bestätigen. [Übrigens ist die vom Verf. gefundene Exzentrizitätsbedingung im wesentlichen identisch mit der Beziehung, aus der Hill (vgl. etwa F. Tisserand, *Mécanique Céleste* 4, 113 (1896)) die Titanmasse berechnet hat.] Vgl. eine kürzlich erschienene Arbeit von E. Hölder [*Amer. J. Math.* 60, 801—814 (1938); nachsteh. Referat], die mittels anderweitiger Ansätze und unter strenger Durchführung von Existenzbeweisen (Lichtenstein) zu ähnlichen Ergebnissen gelangt. — Zum Schluß wird das Problem der Unsymmetrie in dem Grenzfall betrachtet, der einer ungestörten Bewegung entlang der Jupiterbahn entspricht. *Wintner* (Baltimore).

Hölder, Ernst: Die symmetrischen periodischen Bahnen des restringierten Dreikörperproblems in der Nachbarschaft eines kritischen Keplerkreises. *Amer. J. Math.* 60, 801—814 (1938).

The author determines the leading terms in the expansion of the manifold of all periodic solutions of the restricted problem of three bodies in the vicinity of a (critical) Kepler circle with integral period ratio. It turns out that isoenergetic analytic continuation of periodic solution for increasing mass ratio μ is possible also at these critical energy levels, a case which had escaped previous mathematical attempts. The result is in agreement with the excentricity formula of Hill-Tisserand. The analytic continuation of the whole isoenergetic system while the energy passes through the critical value is not possible from one side and leads to isoenergetic systems starting for $\mu = 0$ at (elliptic) periodic solution of the second sort from the other side. The method used is a further development of Lichtenstein's method of successive approximation for non-linear boundary value problems. *van Kampen*.

Miechkovitch, V. V.: Quelques conclusions à tirer des diverses évaluations des inégalités séculaires de l'excentricité de l'orbite de la terre. *Publ. Math. Univ. Belgrade* 6/7, 209—218 (1938).

Verf. versucht festzustellen, wieweit die Differenzen zwischen den geologisch bestimmten Klimaänderungen und den mehrfach zu ihrer Erklärung herangezogenen säkularen Schwankungen der astronomischen Elemente der Erdbahn durch Unsicherheiten in der Kenntnis der Planetenmassen erklärt werden können. Soweit die nach Stockwell oder Leverrier berechneten säkularen Störungen von der ersten Ordnung der Planetenmassen in Frage kommen, bleiben die Differenzen ungeklärt. *Klose*.

Strömgren, Elis: Periodic orbits in the restricted problem of three bodies in their relation to Hill's work on the motion of the moon. *Amer. J. Math.* 60, 867—879 (1938).

The author gives a short description of numerical results obtained over a period of years in the Copenhagen Observatory. *van Kampen*.

Wintner, Aurel: On Hill's periodic lunar orbit. *Amer. J. Math.* 60, 937—948 (1938).

Die Konvergenz in der Hillschen Theorie der Mondbahn [*Amer. J. Math.* 1 (1878)] ist von dem Verf. schon früher [*Math. Z.* 24, 259—265 (1925)] untersucht worden. Hier nimmt er dasselbe Problem wieder auf, diesmal in engerem Anschluß an die Hillschen Gedankengänge. *Klose* (Berlin).

Chazy, Jean: Sur les avances du nœud et du périhélie d'une planète sous l'action d'une anneau circulaire. *Amer. J. Math.* 60, 793—800 (1938).

The mathematically elementary methods used by Fatou in computing the advances of the node and perihelion of a planet are summarized and interpreted in the light of the classical theory of small oscillations. The motions considered are certain nearly circular motions of a particle moving in a Newtonian field of force possessing axial symmetry, the potential function being (in cylindrical coordinates) of the form

$\mu/\sqrt{r^2 + z^2} + R(\sqrt{r^2 + z^2}, z)$, where R is an even function of z and is small compared with $\mu/\sqrt{r^2 + z^2}$, and $\partial^2 R/\partial z^2 < 0$ for $z = 0$. D. C. Lewis.

Wavre, R.: Sur les rotations barotropes des masses fluides hétérogènes. Comment. math. helv. 11, 33—36 (1938).

Vgl. das Referat zur Note des Verf. in C. R. Acad. Sci., Paris 207, 460—462 (1938), dies. Zbl. 19, 336, deren Beweismethode ausführlicher dargestellt wird. E. Hölder.

Mathematische Physik.

Optik:

Sauer, R.: Zur optischen Abbildung von Strahlensystemen. Z. angew. Math. Mech. 18, 312—313 (1938).

Zwei durch eine optische Abbildung verkoppelbare Strahlensysteme Σ und Σ' können nicht unabhängig voneinander sein, sondern sie müssen in einer besonderen Beziehung zueinander stehen. Sauer leitet diese Bedingung ab, indem er der Liniengeometrie die Begriffe „sphärisches Bild“ und „mittlerer Drall eines Strahlensystems“ (für einen Systemstrahl) entnimmt und einen Integralsatz von W. Blaschke sowie die Poincarésche Strahleninvariante anwendet. Er kommt zu der Bedingung: Zu jedem Paar zugeordneter Strahlen gehört eine Flächenvergrößerung $\omega' = df'/df$ der sphärischen Bilder und ein Verhältnis der mittleren Drallwerte D'/D . Bei einer optischen Abbildung besteht die Gleichung $n'D'\omega'/nD = 1$. Die Gleichung entspricht der Beziehung zwischen Maßstab und Winkelverhältnis $n'\beta'\gamma'/n = 1$. Als Sonderfall erscheint auch der Satz von Malus. Hans Boegehold (Jena).

Cotte: Recherches sur l'optique électronique. Ann. Phys., Paris 10, 333—405 (1938).

Ausgehend von den Prinzipien von Maupertuis und Fermat bestimmt der Verf. in üblicher Weise den Ausdruck der einem elektrisch-magnetischen Felde zugeordneten Brechungszahl. Er leitet sodann die Gleichung der Wellenflächen der Elektronenoptik ab. Sie stellt bei Voraussetzung rotationssymmetrischer Felder einen rotationssymmetrischen Kegelschnitt dar, u. zw. eine Kugel, wenn $A = 0$ ist, ein Ellipsoid, wenn $|eA| < n_{\text{elektr}}$, ein Paraboloid, wenn $|eA| = n_{\text{elektr}}$, ein Hyperboloid, wenn $|eA| > n_{\text{elektr}}$ ist. (Hier ist A der absolute Betrag des Vektorpotentials \mathcal{A} .) Es folgen die Differentialgleichungen der Trajektorien, also der Elektronenstrahlen in bekannter Weise. — Im 2. Abschnitt behandelt der Verf. eingehend die Gesetze der einer gegebenen Trajektorie benachbarten Trajektorien. Wie vom Verf. bereits in früheren Arbeiten durchgeführt, benutzt er auch hier krummlinige Koordinaten x, y, z , in denen die als gegeben angenommene Trajektorie den Gleichungen $x = 0$ und $y = 0$ genügt. Zur näheren Bestimmung der zweckmäßig zugrunde zu legenden Koordinaten benutzt er zur Lagebestimmung der der gegebenen Trajektorie benachbarten Punkte die aus Normale n , Binormale b und Tangente t der gegebenen Trajektorie gebildeten Koordinatensysteme. Die Lage eines Punktes P der Ebene nb wird durch den Abstand ρ des Punktes P vom Nullpunkt des nbt -Systems und den Winkel $\varphi = (\rho n)$ bestimmt. Durch Einführung eines sich mit z , also längs der gegebenen Trajektorie drehenden Koordinatensystems, dessen Drehgeschwindigkeit mit der Torsion $T(z)$ der gegebenen Trajektorie in engem Zusammenhang steht — es wird φ durch $\psi + \int \frac{dz}{T(z)}$ ersetzt —, ergibt sich mit $x = \rho \cos \psi$ und $y = \rho \sin \psi$ ein Koordinatensystem x, y, z , in dem das Bogenelement ds dem gegebenen benachbarten Elektronenstrahlen die orthogonale Form annimmt:
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + f^2 dz^2$$

mit
$$f(z) = 1 - \frac{\cos \gamma(z)}{R(z)} x + \frac{\sin \gamma(z)}{T(z)} y, \quad \text{worin} \quad \gamma(z) = \int \frac{dz}{T(z)}.$$

Mit Bezug auf dieses dem Problem angepaßte Koordinatensystem werden nunmehr die sonst nur mit Bezug auf achsenbenachbarte Strahlen der Elektronenoptik durch-

geführten Untersuchungen durchgeführt, so z. B. die Darstellung der elektrisch-magnetischen Feldgrößen, die Gleichungen der Trajektorien, deren Eigenschaften eingehend behandelt werden, usw. — Im 3. Abschnitt werden die orthogonalen Systeme in Gaußscher Näherung untersucht, speziell auch der Fall, daß Anfang und Ende der Trajektorien in feldfreien Räumen liegen. Die allgemeinen Gleichungen wendet der Verf. dann auf verschiedene Spezialfälle der Feldverteilung an, die z. B. bereits früher von anderen Verff. behandelt wurden. — Im 4. Abschnitt werden die Aberrationen sowie die Dispersion orthogonaler elektrisch-magnetischer Felder behandelt, wobei der Verf. wieder den allgemeinsten Fall betrachtet, daß der als „Hauptstrahl“ gewählte Strahl eine beliebige krummlinige Trajektorie ist. Objektebene, Blendenebene und Bildebene werden senkrecht zu dieser als Hauptstrahl betrachteten krummlinigen Trajektorie vorausgesetzt. Es wird auch der Einfluß einer Verlagerung der Blendenebene (Verschiebung längs des Hauptstrahls) sowie einer Neigung der Bildebene auf die Aberrationen untersucht. — Im 5. Abschnitt werden die sehr allgemeinen Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte auf zentrierte elektronenoptische Systeme spezialisiert. Es ergeben sich so die bereits bekannten Beziehungen. *Picht* (Babelsberg).

Dallaporta, N.: *Costanti elettro-ottiche nei liquidi polari*. Nuovo Cimento, N. s. 15, 384—396 (1938).

Es werden die elektrooptischen Konstanten einer polaren Flüssigkeit berechnet unter den Annahmen: 1. Die Moleküle sind nicht frei drehbar, es gibt vielmehr Vorzugslagen der gegenseitigen Einstellung gemäß der Debyeschen Hypothese [Physik. Z. 36, 100 (1935)]; 2. die Moleküle sind in kleinen quasikristallinen Gruppen angeordnet [Hypothese von Stewart, Physic. Rev. 30, 232 (1927)]. Die Arbeit schließt sich eng an die von Mueller über nichtpolare Flüssigkeiten an [Physic. Rev. 50, 547 (1936)]. Die quasikristalline Struktur wird so beschrieben: Innerhalb einer solchen Molekülgruppe sind die Verhältnisse dieselben wie im Kristall, die außerhalb liegenden Moleküle können für die Berechnung der Einwirkung auf die Gruppe als statistisch verteilt und orientiert angesehen werden. Die Vorzugsrichtung für die Einstellung der Moleküle braucht nicht mit einer der optischen Achsen der Gruppe zusammenzufallen. Die Polarisierung und das innere elektrische Feld werden berechnet. Daraus ergibt sich die Dispersionsformel; es zeigt sich, daß die Molekularrefraktion vom Assoziationszustand der Flüssigkeit unabhängig sein sollte, was mit der Erfahrung übereinstimmt. Die Berechnung der Kerrkonstante gibt außer den Gliedern mit klassischer Temperaturabhängigkeit ($1/T$, $1/T^2$) noch Glieder mit $1/T^3$ und $1/T^4$. Vergleich mit den Theorien anderer Autoren (Mueller, Debye): Die Ergebnisse von Mueller kommen heraus, wenn man auf nichtpolare Flüssigkeiten spezialisiert, diejenigen von Debye, wenn man die Annahme 2 aufgibt. Der Vergleich der Theorie mit der Erfahrung läßt sich nur bei Benzol machen, weil nur dort aus elektrooptischen und Röntgenstrahlungsmessungen soviel Daten vorhanden sind, daß die theoretisch verfügbaren Parameter bestimmt werden können. Für das Debyesche Orientierungspotential (Annahme 1) ergibt sich ein Wert von etwa $8,5 kT$. *Bechert* (Gießen).

Rosemann, Joachim: *Farbmessungen zur Prüfung des Schrödingerschen Linienelements der höheren Farbenmetrik*. Ann. Physik, V. F. 32, 640—664 (1938).

Die höhere Farbenmetrik versucht der Fähigkeit des Auges, 2 aneinandergrenzende Farbfelder auf Ebenunterscheidbarkeit oder — unter bestimmten Nebenbedingungen — auf größte Ähnlichkeit einzustellen, einen mathematischen Ausdruck zu verleihen. Als Grundlage hierfür dient die Darstellung der Farben in einem dreidimensionalen Raum nach der Young-Helmholtzschen Theorie, dessen Koordinaten die 3 irreellen Grundempfindungen sind. Innerhalb eines Oktanten dieses Raumes erfüllen die reellen Farben einen Kegel mit der Spitze im Nullpunkt, dessen Mantel die 3 Koordinatenebenen berührt und in einem Farbreieck die Kurve der reinen Spektralfarben bildet. Diesem Raum werden von den reinen Gleichheitsurteilen des Auges die Gesetze einer affinen Geometrie verliehen, welche als niedere Farbenmetrik zusammengefaßt werden.

Sollen nun die Punkte zweier ebenunterscheidbarer Farben unabhängig von ihrer Wahl stets gleiche Entfernung voneinander haben, so kann als Maß für die Ähnlichkeit der beiden Farben die Zahl der Ebenunterschiedsstufen angesehen werden, welche mindestens zwischen beiden bestehen. 2 Farben sind dann am ähnlichsten, wenn die zugehörigen Punkte sich durch ein relatives Minimum ihres Abstandes auszeichnen. Der euklidische Abstand erfüllt diese Forderung nicht. Von Schrödinger wurde der Gedanke von Helmholtz wieder aufgegriffen, durch die nichteuklidische Maßbestimmung einer Riemannschen Geometrie eine empfindungsgemäße Darstellung der Farb-urteile des Auges im Farbenraum zu ermöglichen. Das von Schrödinger vorgeschlagene und in der vorliegenden Arbeit auf seine praktische Brauchbarkeit untersuchte Linienelement hat die einfache Form: $ds^2 = \frac{1}{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3} \left(\frac{a_1dx_1^2}{x_1} + \frac{a_2dx_2^2}{x_2} + \frac{a_3dx_3^2}{x_3} \right)$, wobei x_i die 3 Grundempfindungskordinaten der Farbe und a_i die von Exner eingeführten Helligkeitskoeffizienten sind. Es wird gezeigt, daß — unter Verwendung spektralphotometrisch geprüfter Farbfilter — Einstellungen auf größte Ähnlichkeit der Farben sich durch das Schrödingersche Linienelement nicht darstellen lassen. Die größten Abweichungen der Theorie traten nicht bei den blauen, sondern bei den roten Farben ein.

[Tschermak] Schubert (Prag)._o

Relativitätstheorie.

Loiseau, Jean: Remarques au sujet de la théorie de la relativité et de la représentation des phénomènes sur un espace à quatre dimensions. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 974—977 (1938).

Riversdale Colthurst, J.: Relativity and the camera. An observational approach to the Lorentz formulae in special relativity. Math. Gaz. 22, 454—460 (1938).

An attempt to base the Lorentz formulae upon the results of photographs of relatively moving rigid rods taken by observers moving with each rod. (The form of the photographs is assumed, and is in fact inconsistent with that which can be deduced from the Lorentz formulae. The author's mistake is compensated by a further misconception in his discussion of the units used by different observers. Ref.)

W. H. McCrea (Belfast).

Reid, J. B.: An accelerated and a decelerated linear equivalence. Z. Astrophys. 16, 333—342 (1938).

The author develops a general method for investigating the properties of any linear equivalence (see Milne and Whitrow, this Zbl. 18, 382), and describes two new linear equivalences. Of these the first accelerates until its members are completely dispersed and all travelling away from each other with the velocity of light. The second decelerates, each member coming to rest at a uniform distance from his neighbours, the equivalence finally approximating to a relatively stationary equivalence. These new accelerated equivalences differ from that of Leigh Page (see this Zbl. loc. cit.) in that they start off with finite velocities, and also in that it is always possible for any member to send out a signal which will reach any other member within a finite time. The final section of the paper contains a comparative table of the author's and Page's results.

H. S. Ruse (Southampton).

Lancezos, Cornelius: A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions. Ann. of Math., II. s. 39, 842—850 (1938).

Several years ago the author investigated the general nature of the field equations for general relativity which are derivable from an action-principle

$$\delta \int I d\tau = 0,$$

($d\tau$ element of 4-volume), in which the invariant integrand I is a quadratic function of the components of the Riemann-Christoffel tensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ instead of being simply the scalar R formed from it (this Zbl. 3, 177; 4, 87, 88). In the present paper he con-

siders a question arising from this theory, namely what is the most general quadratic action-integral? He rules out integrands involving derivatives of the R-C tensor, but even so is able to construct five independent quadratic scalars from the material available. Three of these are

$$I_1 = R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}, \quad I_2 = R^2, \quad I_3 = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

and the remaining two, denoted by K_1 and K_2 , are formed with the help of the fundamental alternating tensor $\delta^{\alpha\beta\gamma\epsilon}$ of components $0, \pm 1/\sqrt{g}$. Starting, then, with an action-principle $\delta \int (I_1 + \alpha I_2 + \beta I_3 + \gamma K_1 + \epsilon K_2) d\tau = 0$,

(α, β, \dots const), he shows that I_3 may be eliminated on account of an identity which exists between it and I_1, I_2, K_2 , and also that, for any variations between definite limits,

$$\delta \int K_1 d\tau \equiv 0, \quad \delta \int K_2 d\tau \equiv 0.$$

Hence the most general quadratic action-principle is of the form

$$\delta \int (I_1 + \alpha I_2) d\tau = 0.$$

It is significant that this depends only upon the contracted tensor $R_{\alpha\beta}$, a fact which emphasizes the fundamental place held by this tensor in the geometry of nature.

H. S. Ruse (Southampton).

Temple, G.: New systems of normal co-ordinates for relativistic optics. *Proc. roy. Soc., Lond. A* **168**, 122—148 (1938).

For a Riemannian n -space with fundamental form $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ [signature $+1 - (n-1)$] a system of coordinates is defined as follows. Let C be any curve, and A^μ its unit tangent vector. Through any point P draw G , one of the two null-geodesics which intersect C ; let the point of intersection be A , and let τ be the arc-length of C

at A . Let $\lambda = \int_A^P A_\mu dx^\mu$, taken along G , A_μ undergoing parallel propagation (cf. Ruse, this Zbl. **6**, 375), and let α^p ($p = 1, \dots, n-2$) be independent constants specifying the direction of G at A , these constants taking the same values for directions obtained by parallel propagation along C . The system of coordinates is

$$y^p = \alpha^p, \quad y^{n-1} = \tau, \quad y^n = \lambda;$$

the corresponding fundamental form is

$$h_{jk} dy^j dy^k + 2 dy^{n-1} dy^n \quad (j, k = 1, \dots, n-1).$$

These coordinates are applied to the discussion of light rays and wave fronts, variational properties of null-geodesics, and definitions of astronomical distance given by various authors, with particular reference to the Lemaître universe. *J. L. Synge.*

Takeno, Hyôitirô: Contributions to the field theory of the atom. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* **8**, 271—288 (1938).

Die Integrabilitätsbedingungen der Fundamentalgleichung $\nabla_\mu \Psi = \Sigma_\mu \Psi$ ($\Sigma_\mu = A_\mu^{\lambda} \gamma_\lambda + A_\mu^{\lambda 5} \gamma_\lambda \gamma_5$), welche in einer früheren Veröffentlichung des mathematischen Seminars der Hiroshima-Univ. angegeben sind (vgl. Iwatsuki, Mimura und Morinaga, dies Zbl. **18**, 187), werden gelöst unter der Annahme, daß $g_{\mu\lambda}$ kugelsymmetrisch ist.

J. Haantjes (Amsterdam).

Astrophysik.

Stewart, John Q., and H. A. A. Panofsky: The mathematical characteristics of sunspot variations. *Astrophys. J.* **88**, 385—407 (1938).

Die Verff. beschäftigen sich mit der mathematischen Diskussion der von der Sternwarte in Zürich publizierten Wolfischen Sonnenfleckenzahlen. Sie greifen den Gedanken von Halm und von Waldmeier [*Astron. Mitt. Zürich* **133**, 105 (1935)] auf, daß es sich bei jedem Sonnenfleckenzklus um einen neuen „Ausbruch“ handelt, und versuchen, die Fleckenzahlen R eines Zyklus in der Form $R = F \cdot \theta^a e^{-b\theta}$ dar-

zustellen, wo F , a und b verfügbare Parameter sind und θ die Zeit, vom Beginn des Ausbruchs gerechnet, darstellt. Die einzelnen Zyklen unterscheiden sich nur durch die Werte von F , a und der Dämpfungskonstante b . Die von den Autoren benutzte Methode gestattet nur die Voraussage der Sonnenfleckenzahlen für kurze Zeiträume, da das bisher für 16 „Ausbrüche“ seit 1749 vorhandene Material noch keine Relationen zwischen den Parametern aufeinanderfolgender Zyklen abzuleiten gestattet, die für langfristige Voraussagen notwendig wären. Die Verff. verwerfen die übliche Fourieranalyse und Periodogrammanalyse der Fleckenzahlen, denn „the improbability, obviously, is tremendous that such components would ever combine to give a succession of superficially dissimilar outbursts each of which nevertheless exhibits common family characteristics to the degree that the present study reveals“.

ten Bruggencate.

Glücksberg, W.: Zur Theorie des Sternaufbaus. *Astron. Nachr.* **267**, 121—128 (1938).

This is a continuation of the author's work on integral theorems on equilibrium configurations of stellar models (this *Zbl.* **17**, 287; **18**, 190; **19**, 93, 94). It supplies a new proof of some of his previous results, and contains four new theorems concerning the run of pressure through a star. The first states that in any equilibrium configuration in which \bar{q} decreases outward the function

$$(P - \bar{P}) M(r) + \frac{1}{3} G \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} \bar{q}^{4/3} M^{5/3}(r)$$

decreases outward, while the function obtained by replacing \bar{q} by q_c increases outward. The notation is the same as before. The second theorem gives a somewhat similar result for $(p_r - \bar{p}_r)$, while the last two give certain derived inequalities for $(P - \bar{P})$ and $(p_r - \bar{p}_r)$.

W. H. McCrea (Belfast).

Biermann, L.: Über die Zahl der Freiheitsgrade von Sternmodellen. *Astron. Nachr.* **267**, 131—136 (1938).

The author expresses agreement with Cowling's criticisms of some of his previous work (this *Zbl.* **19**, 94). He states fully the points at issue, and indicates also which of his results remain unaffected by these criticisms.

W. H. McCrea (Belfast).

Swings, P., and L. Dor: On the integration of the equation of radiative transfer. *Astrophys. J.* **88**, 516—521 (1938).

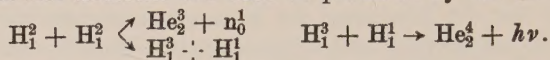
Die Gleichung für den Transport und das Gleichgewicht der Strahlung in einer Sternatmosphäre wird unter Zuhilfenahme von Besselfunktionen nach der verallgemeinerten Spitzerschen Methode streng integriert.

Kiepenheuer (Göttingen).

Gamow, G.: Kernumwandlungen als Energiequelle der Sterne. *Z. Astrophys.* **16**, 113—160 (1938).

In the first part of the paper the author gives a summary of the general theory of nuclear reactions based on the nuclear model proposed by Bohr; formulae are given for instance for the cross section of capture of incident particles by atomic nuclei, and for the probability of emission of particles and γ -rays by nuclei; also, the empirical evidence supporting the nuclear model of Bohr is discussed. The second chapter is devoted to a study of nuclear transformations taking place at thermal energies in the interior of stars. Formulae are developed for the velocity of these reactions as a function of nuclear charge, velocity of incident particles and temperature of the stellar matter. In particular reactions involving the radiative capture of protons are discussed, and also transformations involving β -emission, namely the process $H_1^1 + H_1^1 \rightarrow H_2^2 + \beta$. Diagrams are given showing the dependence of the „Eindringungszahlen“ for protons on atomic number at certain given temperatures and densities, and also curves giving the „Eindringungszahlen“ for $p - p$, $p - \alpha$ and $\alpha - \alpha$ collisions as functions of temperature. The third chapter discusses the astrophysical applications. The simplest hypothesis one can make in a theory of stellar energy generation is to assume that to begin with all stars contained only hydrogen, and that the stellar evolution consists in the building up of helium and other heavier elements, whereby the corresponding binding energies are released. The author investigates the possibilities of this hypothesis.

in the light of modern knowledge about nuclear reactions. He starts from the process $H_1^1 + H_1^1 \rightarrow H_1^2 + \beta$, which is the only one that can take place between hydrogen nuclei. Helium nuclei and free neutrons can then be produced by the reactions



The chain of reactions considered by von Weizsäcker, and other similar chains of nuclear reactions, are discussed; the possible importance of three-body collisions is also considered. The heavy elements must be assumed to be built up by successive neutron captures. It is difficult to find the nuclear reactions which can be made responsible for the life of the stars, and the author suggests that we may possibly have to do with two processes: one for the energy generation, and one for the neutron production and the building up of the heavy elements. Ch. 4 is devoted to a more detailed study of the internal structure of stars, the energy of which is supplied by processes such as those considered in the previous chapters of the paper. The author traces the evolution of stars which are using up their hydrogen in nuclear reactions. After a slight initial decrease, the luminosity increases with decreasing hydrogen content. He finds that it may be possible, by his theory, to account for the distribution of the stars in the Hertzsprung-Russell diagram; the distribution of the giants may thereby be explained by the assumption that the nuclear reaction supplying the energy of these stars is a resonance effect taking place at the temperatures prevailing in stellar interiors. Ch. 5 discusses the conditions for the occurrence of neutron cores in stars; it is suggested that such super-dense cores may be of importance in the giants. The final chapter deals with pulsations and explosions of stars. When a star, the energy of which is supplied by thermal nuclear reactions, has used up all its hydrogen, a Helmholtz contraction sets in. However, a star with nuclear reactions as energy source has a density distribution different from that of a star the energy of which is supplied by a Helmholtz contraction. At the beginning of a contraction, therefore, a redistribution of mass can be expected, and the author suggests that this phenomenon may be the cause of the novae and super-novae outbursts. The course of the further evolution of the star depends on its mass. If the mass is smaller than a certain critical value M_0 , the star will finally become a white dwarf. If the mass is greater than M_0 , the star may be expected to develop a super-dense core, which will be a source of practically unlimited gravitational energy. After a period of pulsations (Cepheids!) the star will steadily increase its luminosity. The growth of the core is probably connected with an extension of the stellar atmosphere, and the star will move along the giant branch to configurations with greater luminosity and greater radius. *Steensholt* (Oslo).

Schwarzschild, Martin: On the light curves of cepheids. Harvard Coll. Observat., Circular Nr 429, 1—7 (1938).

The author has previously shown (this Zbl. 18, 383) that a change from a standing wave in the main interior of a vibrating star to a progressive wave in the outer layers can yield the observed phase relationships between light-variation and velocity-variation in Cepheids. He now first gives a general argument to show that this theory should explain also the similarities in form and phase between the light- and velocity-curves. Using the four laws governing the pulsations, the energy law, the laws of continuity, of motion, and of radiative transfer, he derives the required luminosity equation. The main mathematical difficulty arises from the fact that it is not permissible to use the approximation of assuming small variations. Finally, the author indicates the method required in applying his results to an actual case to derive numerical values.

W. H. McCrea (Belfast).

Barbier, Daniel: La position de la discontinuité de Balmer et la pression existant dans la photosphère des étoiles des premiers types spectraux. Ann. Astrophysique 1, 317—327 (1938).

The author calculates the energy distribution in stellar spectra in the neighbourhood

of the Balmer discontinuity. He finds that in the first approximation this distribution depends only on the electron pressure. For the stars α Cygni and α Aquilae the results are worked out numerically.

Steensholt (Oslo).

Greenstein, Jesse L.: The theory of interstellar absorption. Harvard Coll. Observat., Circ. Nr 422, 1—36 (1937).

After summarising known results for electrons and atoms, the author uses the Mie theory to compute the "extinction efficiencies" of small particles. He summarises his own and other values in tables giving results for particles of various sizes and various optical constants, for radiation of various wavelengths. Physical reasons, based on laboratory experiments, are given for assuming that the theoretical values should apply to the type (particularly as regards shape) of particle likely to occur in interstellar space, at least in giving correct orders of magnitude. The variation of interstellar absorption with wavelength can be derived from observation, but is not sufficient by itself to decide the type of particle to which it is due. However, a decision is aided by the use of the Oort-Kapteyn upper bound to the density of non-luminous matter in space. For the author can then test which types can produce sufficient absorption per unit volume, consistently with this upper bound to the density, to give the observed extinction of light in space, as well as producing the observed variation with wavelength. But, as he points out, the observed absorption is probably due to a mixture of particles of various sizes and optical constants. He therefore gives tables of the properties of various mixtures. In considering the frequency of occurrence of particles of different sizes he is guided by the assumption that the distribution should fit on smoothly to the known distribution for meteors. He reaches the conclusion that an appreciable part of the absorption cannot be due to atoms or electrons, but can arise from mixtures of either metallic or dielectric "dust" particles. He then considers the effect of radiation-pressure on the particles. This would probably expel particles with radii near the wavelength of light from the galaxy, if there were no absorption of light. The author shows that owing to absorption near the plane of the galaxy there is actually probably no loss in any direction in the Sun's neighbourhood. He shows further that the effect of radiation-pressure near each star is to introduce irregularities into the motion of the interstellar medium, so that it is probably kept well mixed. The numerous tables in this paper will provide important data for much work on these problems.

W. H. McCrea (Belfast).

Cowling, T. G.: On the motion of the apsidal line in close binary systems. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 734—744 (1938).

Durch Untersuchungen von Bedeckungsveränderlichen hat man auf verschiedenen Wegen versucht, unabhängig von der Theorie des Sternaufbaus Aufschlüsse über die Dichteverteilung im Sterninnern zu gewinnen. Russell hat hierzu das bei einigen Bedeckungsveränderlichen beobachtete Vorrücken der Apsidenlinie benutzt. Walter leitete aus beobachteten periodischen kleinen Störungen der Lichtkurven gewisser Bedeckungsveränderlichen, indem er diese auf Librationsbewegungen der Komponenten zurückführte, ebenfalls Werte der Dichtekonzentration ab. Schließlich wurde mit Hilfe der aus den Lichtkurven einer Anzahl von Bedeckungsveränderlichen abgeleiteten Elliptizitäten der Komponenten auf die Dichtekonzentration geschlossen. Durchweg wurden gemäß diesen Methoden Dichtekonzentrationen gefunden, die erheblich geringer waren als die aus der Eddingtonschen Theorie des Sterninnern folgende. — Die Russellsche Formel, die die Winkelgeschwindigkeit der Apsidenbewegung mit gewissen für die Dichteverteilung der Komponenten charakteristischen Konstanten verknüpft, wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die als elliptisch angenommenen Komponenten so orientiert sind, daß die großen Achsen fortwährend in der Richtung der Verbindungslinie der Sternzentren zeigen. Walter zeigte, daß die Russellsche Formel im allgemeinen ungültig ist, wenn die Komponenten als starre Körper angenommen werden. Verf. bezweifelt die Berechtigung der letztgenannten

Annahme. Da die Periode der freien Schwingungen der Komponenten viel kleiner ist als die Umlaufzeit in der Bahn, so wird man vielmehr erwarten, daß die Form der Komponenten fortwährend sehr nahe dem jeweiligen Gravitationsfeld entspricht, so daß in der Tat die großen Achsen der Sternellipsoide fortwährend sehr nahe in der Richtung der Zenterlinie zeigen. Verf. betont, daß die Russellsche Formel dennoch einer Modifikation bedarf, weil Russell unveränderliche Form der Komponenten vorausgesetzt hatte, während nach dem erwähnten Bild die Form mit dem bei exzentrischer Bahn veränderlichen Komponentenabstand variiert. — Diese durch qualitative Überlegungen erhaltenen Resultate werden sodann vom Verf. durch quantitative Berechnungen bestätigt und ergänzt. Zunächst wird der Fall, daß die Komponenten homogen und inkompressibel sind, ausführlich behandelt. Es wird vorausgesetzt, daß die Entfernung der Komponenten groß gegen ihre Dimensionen ist. Reibungseffekte werden vernachlässigt. Die Berechnungen zeigen, daß die Gezeitenkräfte in der Tat in diesem Fall sehr nahe Parallelität zwischen den großen Achsen der Komponenten und der Zenterlinie hervorrufen. Die modifizierte Russellsche Gleichung wird abgeleitet. Auf Grund sehr plausibler Annahmen gelingt sodann die Generalisierung der erhaltenen Resultate auf den allgemeinen Fall inhomogener Komponenten. Die für diesen Fall ermittelte modifizierte Russellsche Formel hat dieselbe Struktur wie die ursprüngliche Formel, unterscheidet sich aber mit Rücksicht auf einen numerischen Faktor wesentlich von dieser. Der Unterschied tritt bei den Anwendungen der Formel deutlich hervor, indem sich nunmehr Dichtekonzentrationen ergeben, die mit den aus der Eddingtonschen Theorie folgenden gut übereinstimmen. — Verf. folgert schließlich, daß bei nichtstarrten Komponenten die möglichen Librationsperioden viel kleiner sind, als die von Walter für starre Komponenten berechneten. Die aus den letztgenannten Berechnungen gefolgerten Dichtekonzentrationen sollten deshalb illusorisch sein. Von den eingangs erwähnten Widersprüchen mit den Dichtekonzentrationen der Theorie des Sterninnern bleibt somit nur der auf dem Material von beobachteten Komponentenelliptizitäten fußende. Jedoch ist vorläufig das betreffende Beobachtungsmaterial ziemlich unsicher.

Bengt Strömgren.

Chandrasekhar, S.: On a generalization of Lindblad's theory of star-streaming. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 98, 710—726 (1938).

If the gravitational field of the galaxy can be represented by a model with cylindrical symmetry, it is known, from the dispersion of velocities of stars in the neighborhood of the Sun, that they must be moving in nearly circular orbits about the axis of symmetry. The author first studies the dynamics of such motion referred to a system of axes, with origin near the Sun, rotating about the axis of symmetry. He then derives the velocity-distribution function characterising the local motions and obtains the usual representation by means of the velocity ellipsoid. He shows that for a neighbourhood near the galactic plane the axes of this ellipsoid in the meridian plane are not in general equal, in agreement with observation. Lindblad's original theory had been confined to motion in the galactic plane, and had not yielded this result. The author shows further that for a neighbourhood away from the galactic plane the principal axes of the velocity ellipsoid in the meridian plane are tilted with respect to the galactic plane. Taking the Sun's distance from the galactic centre as 10000 parsecs, at a height 3500 parsecs above the galactic plane at this distance he predicts an angle of tilt about 55° , which should be capable of observation test. Finally he discusses the stability of the almost circular motions. Under certain conditions depending upon the gravitational potential function the integrals of the dynamical equation will contain terms exponential in the time, leading to instability in the motions considered. The author finds the regions in which this will occur in cases where the potential is that due to a mass concentrated at the galactic centre, and where it is due to a uniform spheroidal distribution, and where it is a combination of these.

W. H. McCrea (Belfast).